

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk XII

Lineaire Programmering

door

J. Kriens

augustus 1960

1. Enige eenvoudige voorbeelden

Voorbeeld 1.1 ¹⁾

In een fabriek wil men de vervaardiging van een legering ter hand nemen, welke minstens een bepaald percentage koper moet bevatten. Om het voorbeeld eenvoudiger te houden, worden aan de legering geen verdere chemische of fysische eisen gesteld. Voor de fabricage kunnen verschillende grondstoffen gebruikt worden, welke men ook in willekeurige verhoudingen kan mengen. Men vraagt zich nu af op welke wijze de legering zo goedkoop mogelijk gemaakt kan worden, terwijl toch aan de gestelde eis is voldaan.

Laten wij aannemen, dat het produkt minstens 18% koper moet bevatten en dat er vier grondstoffen zijn, die wij kunnen gebruiken. In tabel 1.I is opgegeven, hoeveel procent koper in iedere grondstof aanwezig is en wat de kosten zijn per ton.

Tabel 1.I

Percentage koper en kosten van de grondstoffen

grondstof	percentage koper	kosten per ton	kosten per % koper
A	51	40	$\frac{40}{51} = 0,78$
B	11	20	$\frac{20}{11} = 1,82$
D	14	24	$\frac{24}{14} = 1,71$
E	36	30	$\frac{30}{36} = 0,83$

Uit de vierde kolom kan men aflezen, dat grondstof A de goedkoopste bron van koper is.

Geen van de grondstoffen bevat precies 18% koper, maar de grondstoffen A en E voldoen aan de eis minstens 18% te bevatten. Het percentage van B en D, die per ton goedkoper zijn dan A en E, is echter te laag. Daarom ligt het voor de hand na te gaan, of wij door het kiezen van een mengsel van enige grondstoffen niet een

¹⁾ De voorbeelden 1.1 en 1.2 zijn gebaseerd op een artikel van N. WILLIAMS, An application of linear programming to the selection of raw materials, Applied Statistics 4, (1955), 22-31.

produkt kunnen krijgen, dat aan de eis voldoet en bovendien goedkoper is dan de grondstoffen A en E afzonderlijk. Om dit systematisch te onderzoeken gaan wij als volgt te werk

Wij gaan uit van grondstof A; deze voldoet zeker aan de gestelde eis, want A bevat zelfs 33% koper meer dan nodig is. Om een legering te verkrijgen, die goedkoper is, mengen wij A met het goedkopere, maar aan koper armere B.

Ter vereenvoudiging zullen wij aannemen, dat men 1 ton van de legering wil produceren. Stel dat wij 1 ton legering, die 18% koper bevat, verkrijgen door y ton A met 1-y ton B te mengen. Wiskundig uitgedrukt betekent dit, dat moet zijn voldaan aan de vergelijking

$$51y + 11(1-y) = 18 \quad (1.1)$$

waaruit volgt, dat de legering moet bestaan uit 0,175 ton A en 0,825 ton B. De kosten bedragen dan

$$\begin{array}{rcl} \text{aan A:} & 0,175 \times 40 & = 7 \\ \text{aan B:} & 0,825 \times 20 & = 16,50 \\ & \hline & \text{totaal:} & 23,50 \end{array} +$$

Dit mengsel is dus $40 - 23,50 = 16,50$ per ton goedkoper dan grondstof A.

Wij kunnen op dezelfde wijze berekenen hoe duur een mengsel van A en B is, dat evenveel koper bevat als D, respectievelijk E. Indien één van deze laatste grondstoffen goedkoper is dan het overeenkomende mengsel van A en B, dan zal het voordelig zijn zoveel mogelijk van de gevonden legering door deze grondstof te vervangen.

De resultaten van de genoemde vergelijkingen kan men vinden in tabel 1.II. In de eerste en tweede regel staat hoeveel A en hoeveel B het mengsel per ton moet bevatten om evenveel koper te bezitten als de boven de kolom vermelde stof. De kosten van deze mengsels staan in de derde regel, terwijl de laatste regel het verschil bevat tussen de kosten van een ton mengsel en een ton van de grondstof, waarmee dit mengsel overeenkomt.

De legering van 0,175 ton A en 0,825 ton B kunnen wij dus wel goedkoper maken door grondstof E te gebruiken, maar niet met behulp van D.

Tabel 1.II
Mengsels van A en B met hetzelfde koper-
gehalte als legering en grondstoffen

	legering 18% Cu	A 51% Cu	B 11% Cu	D 14% Cu	E 36% Cu
hoeveelheid A	0,175	1	0	0,075	0,625
hoeveelheid B	0,825	0	1	0,925	0,375
kosten mengsel	23,5	40	20	21,5	32,5
kosten grond- stoffen		40	20	24	30
kosten mengsel min kosten grondstof		0	0	- 2,5	2,5

Daar een mengsel van 0,625 ton A en 0,375 ton B met een ton E overeenkomt, is het niet mogelijk meer dan $\frac{0,175}{0,625} = 0,28$ ton E te nemen, omdat de hoeveelheid A aanwezig in de legering, genoemd in de eerste kolom dan is uitgeput. Behalve 0,28 ton E bevat de legering dan nog $1 - 0,28 = 0,72$ ton B en de kosten zijn:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{aan E:} & 0,28 \times 30 & = 8,4 \\
 \text{aan B:} & 0,72 \times 20 & = 14,4 \\
 & \underline{\hspace{1cm}} & + \\
 \text{totaal:} & 22,8 &
 \end{array}$$

Deze legering, die ook 18% koper bevat, is dus weer $23,5 - 22,8 = 0,7$ goedkoper dan de legering van A en B.

Het is niet mogelijk een nog voordeligere samenstelling van de legering te vinden. Immers D was al duurder dan het overeenkomstige mengsel van A en B, dus zeker duurder dan een overeenkomstig mengsel van B en E, terwijl wij A juist hebben verwijderd ten gunste van E. Wat wij nog niet aangetoond hebben, is dat een legering, die meer dan 18% koper bevat niet goedkoper kan zijn. Het gehalte aan koper kan echter alleen hoger worden door, hetzij B geheel of gedeeltelijk te vervangen door A, D of E, hetzij E geheel of gedeeltelijk te vervangen door A. Tabel 1.I leert ons, dat de legering bij ieder van deze substituties duurder wordt. Onder de legeringen, die men uit A, B, D en E kan maken en die minstens 18% koper bevatten, is dus de voordeligste: 0,28 ton E en 0,72 ton B.

Voorbeeld 1.2

Iets ingewikkelder wordt het eerste voorbeeld, wanneer aan het gebruik van de grondstoffen A, B, D en E grenzen worden gesteld. Laten wij aannemen, dat de grondstoffen B en D tezamen niet meer dan 20% van de legering mogen uitmaken. De oplossing, gegeven in voorbeeld 1.1 voldoet dan niet meer, omdat deze voor 72% uit B bestond. Wij trachten nu onder deze extra voorwaarde de legering te vinden, die het goedkoopste is. Het is dan zeer goed mogelijk, dat deze legering meer dan 18% koper bevat, of minder dan 20% van de grondstoffen B en D. Het verschil tussen het percentage koper in de legering en het vereiste minimum percentage geven wij aan met δ_1 , het verschil tussen het maximaal toegelaten percentage B en D en het aanwezige percentage met δ_2 ; beide variabelen moeten dus ≥ 0 zijn.

Een legering, die volgens tabel 1.I in ieder geval voldoet, is die, welke alleen bestaat uit grondstof E. Het overschot aan koper bedraagt dan $\delta_1 = 36 - 18 = 18\%$; van de toegelaten marge aan B en D is niets gebruikt ($\delta_2 = 20\%$) en de kosten zijn 30.

Wij onderzoeken nu of op een of andere wijze een goedkopere legering te fabriceren is, die aan de eisen voldoet. Hierbij kunnen wij er gebruik van maken, dat $\delta_1 = 18\%$ en $\delta_2 = 20\%$ is. Omdat van de goedkoopste grondstof (B) de grootste prijsverlaging te verwachten is, mengen wij deze met E. Zouden wij y ton E vervangen door y ton B, dan verminderde het overschot δ_1 aan koper met $(36-11)y = 25y\%$ en δ_2 met $100.y\%$. Daar δ_1 en δ_2 geen van beide negatief mogen worden, moet y voldoen aan $25y \leq 18$ en $100y \leq 20$ en kan dus hoogstens gelijk zijn aan het minimum van $\frac{18}{25}$ en $\frac{20}{100}$. Dit betekent, dat niet meer dan 0,20 ton E door B kan worden vervangen. De kosten van 1 ton van de legering bedragen dan

$$\begin{array}{rcl} \text{aan B:} & 0,2 \times 20 = & 4 \\ \text{aan E:} & 0,8 \times 30 = & 24 \\ & \text{-----} & + \\ & \text{totaal:} & 28, \end{array}$$

wat 2 goedkoper is dan een legering alleen bestaande uit grondstof E, terwijl het percentage koper $0,2.11 + 0,8.36 = 31$ is; dus $\delta_1 = 13$ en $\delta_2 = 0$.

Een verdere verlaging van de kosten is niet mogelijk. De totale hoeveelheid van B en D mag niet toenemen wegens $\delta_2 = 0$; wel kunnen wij B vervangen door A, D of E, maar dit heeft steeds verhoging van

de kosten ten gevolge. Ook vervanging van E door A leidt tot een duurder produkt. De voordeligste legering bestaat dus uit 0,2 ton B en 0,8 ton E en bevat 13% meer koper dan de toegelaten minimum hoeveelheid van 18%.

Wij zullen hetzelfde probleem nu formuleren in de taal der wiskunde. Hoe de legering ook is samengesteld, steeds kunnen wij zeggen, dat het een mengsel is, waarin alleen de grondstoffen A, B, D en E kunnen voorkomen. Daarom nemen wij aan, dat één ton legering x_A ton A, x_B ton B, x_D ton D en x_E ton E bevat. Wij kunnen deze waarden niet willekeurig kiezen. In de eerste plaats moet voldaan worden aan de vergelijking

$$x_A + x_B + x_D + x_E = 1. \quad (1.2)$$

Bovendien moet het percentage koper minstens 18 bedragen, terwijl de totale hoeveelheid van B en D niet meer dan 20% van de legering mag uitmaken. In formule luiden deze voorwaarden

$$51x_A + 11x_B + 14x_D + 36x_E \geq 18 \quad (1.3)$$

en

$$100x_B + 100x_D \leq 20. \quad (1.4)$$

Maken wij gebruik van de boven ingevoerde variabelen δ_1 en δ_2 dan gaan (1.3) en (1.4) over in

$$51x_A + 11x_B + 14x_D + 36x_E - \delta_1 = 18 \quad (1.5)$$

en

$$100x_B + 100x_D + \delta_2 = 20. \quad (1.6)$$

Alle variabelen in de vergelijkingen (1.5) en (1.6) kunnen slechts niet-negatieve waarden aannemen.

De kosten z_0 van zo'n mengsel bedragen

$$z_0 = 40x_A + 20x_B + 24x_D + 30x_E. \quad (1.7)$$

De vraag welke in het voorgaande werd beantwoord, was nu: hoe moeten wij x_A , x_B , x_D en x_E kiezen, opdat de kosten z_0 minimaal zijn onder de voorwaarden, dat voldaan is aan de vergelijkingen (1.2), (1.5) en (1.6) en bovendien alle variabelen ≥ 0 zijn.

Voorbeeld 1.3 ¹⁾

In een fabriek kunnen twee soorten schroeven worden gemaakt. Bij de fabricage moeten beide soorten worden bewerkt door een machine, die de kop maakt en een machine, die de schroefdraad aanbrengt. Wanneer er voldoende arbeiders aanwezig zijn, de grondstoffen in willekeurige hoeveelheden tegen constante prijs aangevoerd kunnen worden, alle schroeven op de markt een afzet vinden tegen vaste prijzen, en ook de andere produktiefactoren geen belemmeringen vormen voor het niveau waarop de produktie zal plaatsvinden, dan wordt dit niveau bepaald door de capaciteiten van de twee genoemde machines. De produktieleider zal nu nagaan, op welke wijze zijn fabriek de grootst mogelijke winst kan behalen. Dit probleem komt dus hierop neer, dat een functie (de winst) gemaximaliseerd moet worden onder bepaalde beperkingen.

Stel dat een schroef van type S_1 3 cent winst geeft en een schroef van type S_2 4 cent. Uit tijdstudies in voorafgaande jaren is bekend, hoeveel seconden de twee typen (S_1 en S_2) op de machines (M_1 en M_2) in bewerking zijn. De gegevens zijn vermeld in tabel 1.III.

Tabel 1.III
Bewerkingstijden en winsten van de schroeven

schroef	bewerkingstijd op machine		winst
	M_1	M_2	
S_1	2	5	3
S_2	3	2	4

Gedurende de periode, waarvoor het produktieprogramma ontwikkeld moet worden, staan de machines beide 1 uur = 3600 seconden ter beschikking.

Wanneer er x_1 schroeven van het eerste type en x_2 van het tweede type worden vervaardigd, bedraagt de winst

1) Dit voorbeeld is ontleend aan een artikel van M.E. SALVESON, Mathematical methods in management programming, Proceedings of the conference on Operations Research in production and inventory control (1954), p. 23-41.

$$z_0 = 3x_1 + 4x_2 \quad (1.8)$$

Door de beperkte capaciteit van de machines moeten x_1 en x_2 voldoen aan de voorwaarden

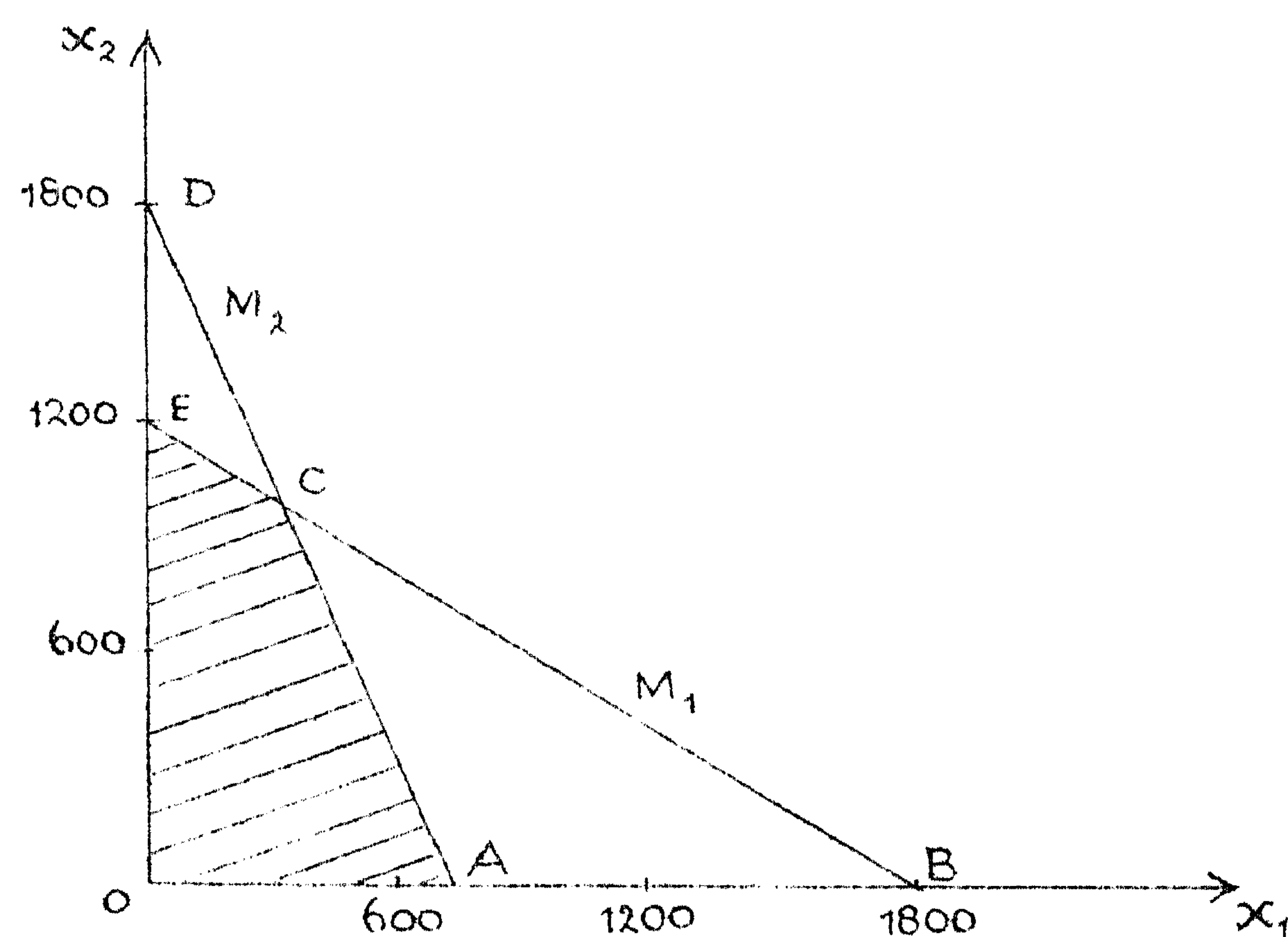
$$2x_1 + 3x_2 \leq 3600 \text{ (wegens } M_1) \quad (1.9)$$

en

$$5x_1 + 2x_2 \leq 3600 \text{ (wegens } M_2) \quad (1.10)$$

Vanzelfsprekend moet ook gelden $x_1 \geq 0$ en $x_2 \geq 0$.

Ten gevolge van deze vier ongelijkheden kunnen wij de waarden van x_1 en x_2 niet willekeurig kiezen. In figuur 1.1 is dit geïllustreerd. Langs de horizontale as is het aantal schroeven S_1 , dat gemaakt wordt, uitgezet en langs de verticale as het aantal van type twee. Omdat x_1 en x_2 beide ≥ 0 moeten zijn, is alleen het getekende kwadrant van belang. Verder staat machine M_1 niet toe, dat het aantal te produceren schroeven voorgesteld wordt door een punt, waarvan de coördinaten buiten de driehoek OBE liggen; evenzo beperkt machine M_2 ons tot driehoek OAD. Alleen combinaties (x_1, x_2) , waarvan de bijbehorende punten in het gearceerde gebied liggen, zijn dus toelaatbaar.



figuur 1.1

Het gearceerde gebied geeft de produktiemogelijkheden aan

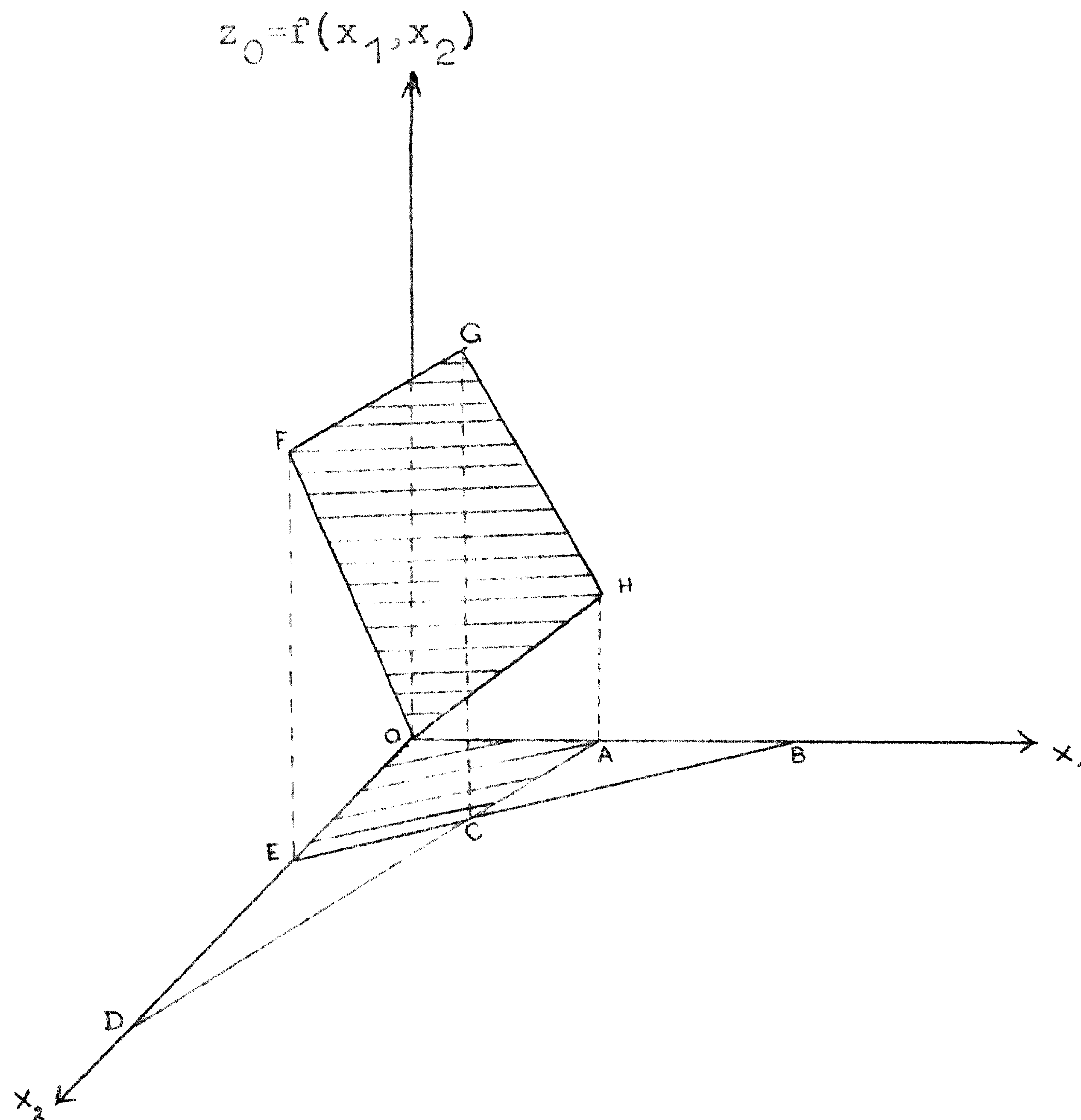
Als het produktieprogramma wordt voorgesteld door een punt van EC, is machine M_1 voortdurend in gebruik; machine M_2 wordt, behalve in het punt C tijdens een deel van het proces buiten bedrijf gesteld. Besluiten wij tot het produktieproces A, dan worden alleen schroeven van het eerste type gemaakt en is machine M_2 volledig bezet, in tegenstelling tot machine M_2 .

Het produceren van bijv. 1200 schroeven S_1 is ten aanzien van machine M_1 nog wel mogelijk, ten aanzien van machine M_2 echter niet.

Onder de produktieprogramma's, die uitvoerbaar zijn, willen wij nu het programma kiezen, dat de winst zo groot mogelijk maakt. Bij ieder stel waarden van x_1 en x_2 kunnen wij de winst berekenen; deze is bij een programma van 150 schroeven S_1 en van 1100 schroeven S_2

$$150 \cdot 3 + 1100 \cdot 4 = 4.850.$$

In figuur 1.2 is langs een derde as, loodrecht op x_1 en x_2 voor ieder stel waarden (x_1, x_2) de bijbehorende winst $z_0 = f(x_1, x_2)$ uitgezet. Omdat z_0 een lineaire functie is van x_1 en x_2 liggen deze punten alle in een plat vlak.



figuur 1.2

Winst als functie van het produktieprogramma

Tabel 1.IV geeft een overzicht van de coördinaten van de belangrijkste punten uit figuur 1.2.

Wat het meest winstgevende produktieprogramma is, kunnen wij uit de figuur of de tabel direct aflezen. In ons geval is dit het fabriceren van 327 schroeven S_1 en 982 schroeven S_2 , waarbij een winst van 4909 bereikt wordt en beide machines voortdurend in bedrijf zijn.

Tabel 1.IV

Winst als functie van het produktieprogramma

produktieprogramma			winst	
S_1	S_2	punt	grootte (z_0)	punt
0	0	O	0	O
720	0	A	2160	H
0	1200	E	4800	F
327	982	C	4909	G

Het is duidelijk dat de winst nooit maximaal is bij een programma, dat correspondeert met een punt in het inwendige van het gebied OACE, daar men dan van beide typen nog meer schroeven kan maken. Het optimale programma ligt dus in ieder geval op de omtrek van het gebied. Bovendien kunnen wij opmerken dat, tenzij de winst voor alle punten van een zijde even groot is, nog verbetering te bereiken is, zolang wij ons niet in een hoekpunt bevinden. Wij vinden dus zeker het maximum, wanneer wij de winsten vergelijken in de hoekpunten O, A, C en E.

In dit voorbeeld zijn beide machines in het meest winstgevende programma volledig bezet. Bij andere waarden van de in tabel 1.III opgegeven constanten is het zeer wel mogelijk, dat één van de machines tijdens een deel van het proces niet gebruikt wordt. Daarom is het vaak gemakkelijk het aantal seconden, dat de machines niet werken aan te geven door nieuwe variabelen δ_1 en δ_2 . Wij kunnen dan de ongelijkheden (1.9) en (1.10) schrijven in de vorm van vergelijkingen:

$$2x_1 + 3x_1 + \delta_1 = 3600 \quad (1.11)$$

en

$$5x_1 + 2x_2 + \delta_2 = 3600, \quad (1.12)$$

waarin ook δ_1 en δ_2 alleen waarden ≥ 0 kunnen aannemen.

Uitgedrukt met behulp van deze vergelijkingen luidt het probleem, dat wij hebben opgelost, dus: maximaliseer

$$z_0 = 3x_1 + 4x_2,$$

onder de voorwaarde, dat x_1 en x_2 moeten voldoen aan de vergelijkingen (1.11) en (1.12), waarin zowel x_1 en x_2 als δ_1 en δ_2 slechts niet-negatieve waarden kunnen aannemen.

2. Overzicht

In de drie in paragraaf 1 uitgewerkte voorbeelden is er een lineaire functie die geminimaliseerd of gemaximaliseerd moet worden, terwijl de variabelen moeten voldoen aan één of meer lineaire vergelijkingen en/of ongelijkheden en bovendien ≥ 0 moeten zijn. Men noemt deze problemen lineaire programmeringsproblemen. Iets anders geformuleerd kunnen wij zeggen, dat men een probleem met behulp van lineaire programmering kan oplossen, wanneer het voldoende nauwkeurig beschreven kan worden door een wiskundig model met de volgende eigenschappen:

- a) er zijn één of meer functies die geminimaliseerd, respectievelijk gemaximaliseerd moeten worden,
- b) de variabelen, waarin men vrijheid van keuze heeft komen lineair voor in de te optimaliseren functie(s), moeten voldoen aan een aantal voorwaarden, waarin ze eveneens alleen in de eerste graad voorkomen, moeten positief of nul gekozen worden.

Het theoretisch onderzoek en de praktische toepassing van deze modellen dateren vanaf omstreeks 1941. Sindsdien is men er in geslaagd talrijke problemen te gieten in de vorm van lineaire programmeringsmodellen en heeft men verschillende oplossingsmethoden voor deze modellen uitgewerkt.

De meest bekende toepassingen liggen op de terreinen van

1. mengproblemen: het zo goedkoop mogelijk samenstellen van een mengsel (veevoeder, diëet, legering) dat aan bepaalde eisen moet voldoen, uit verschillende grondstoffen waarvan de samen-

stelling en de kostprijs bekend is (vgl. de voorbeelden 1.1 en 1.2);

2. toewijzingsproblemen: het vaststellen op welke wijze beschikbare capaciteiten (machines, kapitaal, grond, arbeiders) verdeeld moeten worden over verschillende mogelijke productieprocessen, opdat de winst of een andere grootheid optimaal wordt (vgl. voorbeeld 1.3);

3. transportproblemen: het vervoeren van een homogeen produkt (graan, olie, erts) vanuit een aantal opslagplaatsen naar een aantal bestemmingen, zodanig dat de transportkosten minimaal zijn (vgl. paragraaf 13).

Daarnaast bestaan er nog talloze andere toepassingen, waarvan wij er verderop nog twee zullen laten zien. Voor verdere voorbeelden verwijzen wij naar de uittreksels in de rapporten "Overzicht van een aantal artikelen over Operations Research" I en II S 167 (Ov 5) / van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

De eerste algemene oplossingsmethode is in 1947 gepubliceerd door G.B. DANTZIG en draagt de naam simplexmethode. Evenals in de voorbeelden 1.1 en 1.2 gebeurd is, zoekt men daarbij eerst een oplossing, die aan de eisen voldoet en wijzigt deze dan net zolang tot geen verbetering van de oplossing meer mogelijk is. Het is dus een iteratiemethode, waarmee men na een (eindig) aantal stappen het doel bereikt. Na 1947 zijn er verschillende variaties van deze methode uitgewerkt, terwijl er eveneens geheel andere methoden ontwikkeld zijn. De op de simplexmethode gebaseerde oplossingsmethoden zijn in de praktijk steeds de beste gebleken. Wij behandelen in dit hoofdstuk na de oorspronkelijke vorm van de simplexmethode, de herziene simplexmethode (revised simplex method), waarmee de berekeningen in veel gevallen aanzienlijk minder tijd vergen dan met de oude vorm.

Tenslotte wijzen wij er nog op, dat in dit hoofdstuk steeds wordt aangenomen, dat de variabelen continu kunnen variëren. Zogenaamde discrete problemen, waarin de variabelen alleen gehele waarden kunnen aannemen worden niet behandeld, tenzij de gewone methoden gebruikt kunnen worden en het geoorloofd is de hiermee gevonden waarden van de variabelen af te ronden tot toegelaten waarden (vgl. voorbeeld 1.3).

/ resp. S 239 (Ov 5)

3. Algemene probleemstelling

In aansluiting bij de meeste literatuur over lineaire programmering zullen wij in het vervolg aannemen dat de te optimaliseren functie gemaximaliseerd moet worden. Wanneer men een functie wil minimaliseren, kan men ook het tegengestelde maximaliseren; het bovenstaande houdt dus geen beperking in.

Laat een functie z_0 gegeven zijn, welke lineair afhangt van de variabelen $x_1, \dots, x_p$:

$$z_0 = c_1 x_1 + \dots + c_p x_p = \sum_{h=1}^p c_h x_h, \quad (3.1)$$

waarin $c_1, \dots, c_p$ bekende constanten zijn. Gevraagd wordt voor welke waarden van $x_1, \dots, x_p$ deze functie maximaal is, wanneer moet worden voldaan aan de ongelijkheden

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p &\leq a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p &\leq a_{20} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p &\leq a_{m0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

en $x_1, \dots, x_p$ bovendien alle groter of gelijk aan 0 moeten zijn. De a_{ij} zijn gegeven constanten, welke voor $j > 0$ zowel positief, 0, als negatief zijn; de a_{i0} worden (voorlopig) alle ≥ 0 ondersteld. Omdat wij z_0 willen maximaliseren, zal z_0 meestal een opbrengst voorstellen. De variabelen zijn hetzij hoeveelheden grondstoffen, die men bij de produktie gebruikt, in welk geval de bijbehorende c 's negatief zullen zijn, hetzij gemaakte produkten, in welk geval de bijbehorende c 's (verkoopprijzen) positief zullen zijn.

Evenals in voorbeeld 1.2 veranderen wij het stelsel ongelijkheden (3.2) in een stelsel gelijkheden door het invoeren van nieuwe variabelen $x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$, die het verschil voorstellen tussen de linker leden van (3.2) en de rechter leden. Wij noemen deze extra variabelen, die dus altijd groter of gelijk aan 0 moeten zijn, verschillende variabelen. Het stelsel (3.2) gaat nu over in

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + x_{p+1} &= a_{10} \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + x_{p+2} &= a_{20} \\
 \vdots &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p + x_{p+m} &= a_{m0}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Gebruiken wij $\sum$ -tekens en schrijven wij voor $p+m$ de letter n , dan kunnen de vergelijkingen (3.3) samengevat worden in

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{i0} \quad (i=1, \dots, m) \tag{3.4}$$

Ook de te maximaliseren functie (3.1) zullen wij iets anders schrijven. In (3.3) staan $p+m = n$ variabelen x , in (3.1) echter slechts p . De overige $n-p$ variabelen nemen wij in (3.1) op met coëfficiënt 0:

$$z_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{3.5}$$

De waarde van z_0 verandert hierdoor niet; c_{p+1} tot en met c_n zijn alle gelijk aan 0.

Voor de verdere bespreking van het algemene lineaire programmeringsprobleem is het nuttig dit probleem ook te formuleren met behulp van de in hoofdstuk VIII ingevoerde vector- en matrix-notatie. Hiertoe vatten wij de coëfficiënten c_j samen in de vector $C^1)$, de variabelen x_j in de vector X , de coëfficiënten a_{i0} in de vector A_0 , de coëfficiënten a_{i1} in de vector A_1 , enzovoorts. Het lineaire programmeringsprobleem luidt nu:

$$\text{maximaliseer} \quad z_0 = C X \tag{3.6}$$

$$\text{onder de voorwaarden} \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j = A_0 \tag{3.7}$$

$$\text{en} \quad X \geq 0, \tag{3.8}$$

$$\text{waarin } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{en } A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=0, \dots, n)$$

1) Vektoren worden met hoofd-drukletters aangegeven; tussen rij- en kolomvectoren wordt geen onderscheid gemaakt. Matrices worden met hoofd-schrijffletters aangegeven.

C en X zijn n-dimensionale vectoren, waarin n gelijk is aan het aantal verschillende variabelen dat een rol speelt, terwijl de vectoren A_j ($j=0, \dots, n$) m-dimensionaal zijn en m bepaald wordt door het aantal bijvoorwaarden, dat in (3.3) is opgenomen.

Formule (3.7) kan nog enigszins anders opgeschreven worden wanneer men de vectoren $(A_1, \dots, A_n)$ samenbrengt tot de matrix $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \text{ is dus de m bij n matrix } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ en (3.7) gaat over in}$$

$$\mathcal{A} \cdot X = A_0 \quad (3.9)$$

De vergelijkingen (3.3) en (3.4) samen met de voorwaarden $x_j \geq 0$ resp. (3.6), (3.7) en (3.8) behelzen de nieuwe vorm van het probleem, waarop wij in onze bespreking steeds terug zullen komen. In de vectorvorm kan het als volgt geïnterpreteerd worden: gevraagd een vector X te berekenen, die aan (3.7) en (3.8) voldoet en z_0 maximaal maakt.

Een vector X die aan de voorwaarden voldoet noemen wij een toegelaten vector en deze correspondeert met een toegelaten oplossing.

Nu kan men aantonen dat aan een stelsel vergelijkingen, zoals (3.7) ofwel door geen enkele vector, ofwel door één vector, ofwel door oneindig veel vectoren wordt voldaan. Alleen het laatste geval is voor ons interessant omdat er dan een keuze probleem ontstaat en wij zullen voorlopig dan ook aannemen dat er één of meer toegelaten vectoren zijn.

Men kan bewijzen dat de verzameling van toegelaten vectoren convex is; dit betekent dat wanneer X_1 en X_2 er toe behoren, dat dan ook de vector $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) tot de verzameling behoort. Men vergelijkte figuur 3.1, waarin een convexe verzameling in het platte vlak geschetst is. Het bewijs is niet moeilijk; immers stel dat X_1 en X_2 toegelaten vectoren zijn, dan is

$$\mathcal{A} X_1 = A_0 \quad (3.10)$$

en

$$\mathcal{A} X_2 = A_0 \quad (3.11)$$

Voor de vector $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ geldt nu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] &= \mathcal{A}\lambda X_1 + \mathcal{A}(1-\lambda)X_2 = \lambda \mathcal{A}X_1 + (1-\lambda)\mathcal{A}X_2 = \\ &= \lambda A_0 + (1-\lambda)A_0 = A_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Verder zijn alle elementen van $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ groter of gelijk aan nul.

Bovendien kan men aantonen dat de verzameling niet door ronde lijnstukken wordt begrensd, maar bijvoorbeeld in twee dimensies alleen door rechte lijnstukken en hoekpunten (vgl. figuur 3.1). Evenzo wordt de verzameling van toegelaten vectoren in een drie-dimensionaal probleem alleen begrensd door vlakke veelhoeken, rechte lijnstukken en hoekpunten. De verzameling van toegelaten vectoren bezit bij problemen in ruimten met meer dimensies overeenkomstige eigenschappen.

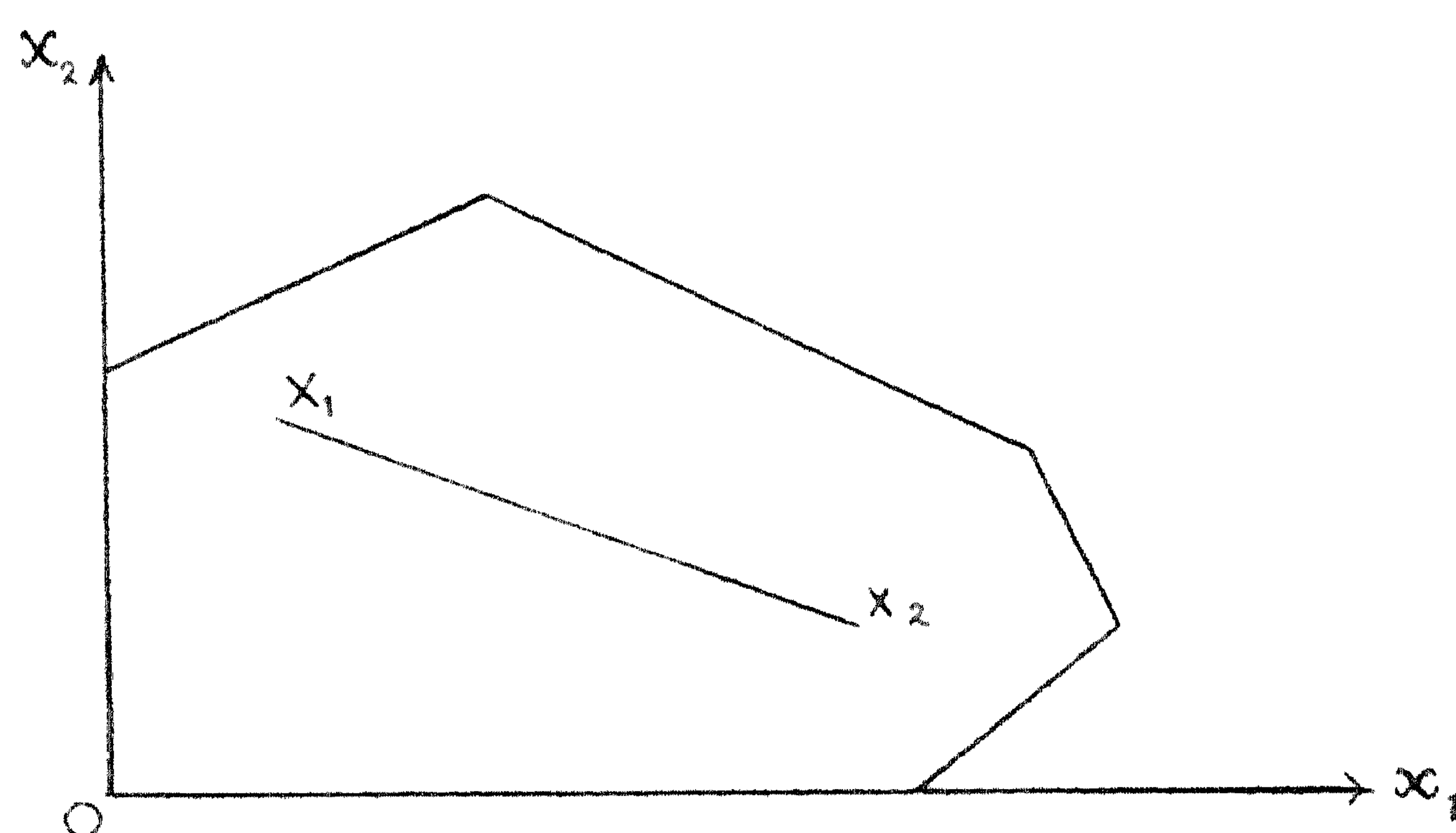


fig. 3.1

Een convexe verzameling in het platte vlak

Er gelden nu de twee volgende stellingen, die wij hier niet zullen bewijzen.

Stelling 3.1 De functie $z_0 = C \cdot X$ bereikt de extreme waarden in hoekpunten van de verzameling van toegelaten vectoren.

Stelling 3.2 Een vector X is dan en slechts dan een hoekpunt van de verzameling van toegelaten vectoren, wanneer de elementen $x_j > 0$ corresponderen met vectoren A_j uit $\mathcal{A}$ die lineair onafhankelijk zijn.

Stelling 3.1 houdt in dat wij ons bij het zoeken naar het maximum kunnen beperken tot de hoekpunten van het toegelaten ge-

bied. Verder volgt uit stelling 4.2 van hoofdstuk VIII dat in een m -dimensionale ruimte ieder stelsel van meer dan m vectoren lineair afhankelijk is en dus volgt uit stelling 3.2 dat er altijd een optimale vector X bestaat, waarvan hoogstens m elementen $\neq 0$ zijn. Zolang er geen complicaties optreden (zogenaamde ontaarding, vgl. paragraaf 8) bezitten de bij de hoekpunten behorende vectoren precies m elementen $\neq 0$. De vectoren A_i die bij deze elementen horen vormen dan een basis van de m -dimensionale ruimte, waarin de vectoren A_j liggen; de betreffende oplossingen worden daarom basisoplossingen genoemd. Aangezien men, wanneer er in een hoekpunt minder dan m elementen van X ongelijk nul zijn, de bij deze elementen behorende vectoren A_i altijd kan aanvullen tot een basis (vgl. stelling 3.2 uit hoofdstuk VIII), noemt men ook in dit geval de oplossing een basisoplossing.

De eerste conclusie luidt dus, dat wij bij het zoeken naar de optimale oplossing alleen basisoplossingen behoeven te vergelijken.

Verder volgt uit het feit dat men op hoogstens $\binom{n}{m}$ verschillende manieren een basis uit de vectoren $A_1, \dots, A_n$ kan vormen, dat het aantal verschillende basisoplossingen $\leq \binom{n}{m}$ is. Wanneer men er nu voor zorgt dat twee basisoplossingen tijdens het oplossen nooit meer dan één keer met elkaar vergeleken worden, dan luidt de tweede conclusie: de oplossingsmethode leidt in een eindig aantal stappen tot de optimale oplossing.

Bij de simplexmethode worden steeds hoekpunten vergeleken met de eigenschap dat de bijbehorende basissen $(m-1)$ vectoren gemeenschappelijk hebben. Voor niet ontaarde problemen betekent dit dat tijdens het iteratieproces bij iedere stap precies één oude variabele > 0 , nul wordt en dat één variabele van nul positief wordt.

Alvorens wij de algemene behandeling van de simplexmethode voortzetten, zullen wij de methode eerst illustreren aan de hand van voorbeeld 1.3 uit paragraaf 1.

4. Berekening van de optimale oplossing van voorbeeld 1.3

Als wij de formules behorende bij voorbeeld 1.3 gieten in de vorm van de formules (3.3) en (3.5), dan vinden wij:

maximaliseer $z_0 = 3x_1 + 4x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$ onder de voorwaarden:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3600 \quad (4.1)$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 3600 \quad (4.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \quad (4.3)$$

Eén stelsel x -waarden, die aan (4.1), (4.2) en (4.3) voldoen is direct uit de vergelijkingen af te lezen, namelijk $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3600$, $x_4 = 3600$. Deze oplossing is wiskundig gezien toelaatbaar. Praktisch gezien betekent het, dat er niets gebeurt en de opbrengst is dan ook nul. Wij noemen deze oplossing de "triviale oplossing"; zij correspondeert met de punten δ in de figuren 1.1 en 1.2.

Een betere oplossing ontstaat wanneer wij hetzij x_1 , hetzij x_2 een positieve waarde geven. Aangezien de winst per eenheid het grootst is voor x_2 (namelijk 4), onderzoeken wij eerst de situatie die ontstaat, wanneer wij x_2 een positieve waarde geven. Aan (4.1) en (4.2) moet voldaan blijven, zodat bij een positieve waarde van x_2 , de waarden van x_3 en x_4 kleiner moeten worden. Deze mogen niet negatief worden; de grootste waarde welke men aan x_2 kan geven is dus gelijk aan het minimum van $\frac{3600}{3}$ en $\frac{3600}{2}$, dus 1200. De oplossing is dan $x_1 = 0$, $x_2 = 1200$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1200$; de winst bedraagt $z_0 = 4800$. Wanneer wij vergelijking (4.1) delen door de coëfficiënt van x_2 en vervolgens vergelijking (4.2) verminderen met 2x deze nieuwe vergelijking, dan krijgen de voorwaarden (4.1) en (4.2) de volgende vorm:

$$\frac{2}{3} x_1 + x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 1200 \quad (4.4)$$

$$\frac{11}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_3 + x_4 = 1200 \quad (4.5)$$

Zoals de triviale oplossing eenvoudig uit (4.1) en (4.2) kon worden afgelezen door x_1 en x_2 nul te stellen, kunnen wij de nieuwe oplossing uit (4.4) en (4.5) afleiden door x_1 en x_3 nul te stellen.

Wederom kan men nu de vraag stellen of een hogere winst te bereiken is door x_1 of x_3 een positieve waarde te geven. Wanneer wij één schroef van het eerste type maken ($x_1 = 1$), dan moet x_2 met $\frac{2}{3}$ en x_4 met $\frac{11}{3}$ verminderd worden om aan (4.4) en (4.5) te blijven voldoen. De winstfunctie wordt dus enerzijds met 3 vermeerderd en anderzijds met $\frac{2}{3} \cdot 4$ en $\frac{11}{3} \cdot 0$ verminderd, in totaal een toeneming

met $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. Het is daarom inderdaad voordelig om de produktie van x_2 en de nog overgebleven vrije tijd op de tweede machine (x_4) op te offeren aan de produktie van x_1 . Wij doen dat nu in zo groot mogelijke mate door x_1 de grootste, toegelaten waarde te geven. Dat is het minimum van $\frac{1200}{2/3}$ en $\frac{1200}{11/3}$, dus $\frac{3600}{11}$. Het nu gevonden produktieprogramma luidt: $x_1 = \frac{3600}{11}$, $x_2 = \frac{10.800}{11}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ met een winst van $3 \cdot \frac{3600}{11} + 4 \cdot \frac{10.800}{11} = \frac{54.000}{11}$. Deelt men vergelijking (4.5) door de coëfficiënt van x_1 en vermindert men daarna vergelijking (4.4) met de nieuwe vergelijking vermenigvuldigd met $\frac{2}{3}$, dan is deze oplossing weer direct uit het vergelijkingenstelsel af te lezen:

$$x_2 + \frac{5}{11} x_3 - \frac{2}{11} x_4 = \frac{10.800}{11} \quad (4.6)$$

$$x_1 - \frac{2}{11} x_3 + \frac{3}{11} x_4 = \frac{3600}{11} \quad (4.7)$$

Deze oplossing is de optimale oplossing. Immers, wanneer wij hetzij x_3 , hetzij x_4 een positieve waarde geven, dan daalt de winst; $z_0 = \frac{54.000}{11}$ is dus het gezochte maximum, hetgeen in overeenstemming is met het in paragraaf 1 gevonden resultaat.

Doordat de coëfficiënten van x_3 en x_4 en de rechter leden van (4.1) en (4.2) positief zijn, kan op eenvoudige wijze een oplossing gegeven worden, die aan de voorwaarden voldoet. Daarna werd onderzocht, of door het positief maken van één van de andere variabelen, de winst verhoogd kon worden. Wanneer dat inderdaad het geval is, dan geeft men de betreffende variabele de maximaal toelaatbare waarde. Vervolgens schrijft men de vergelijkingen in een enigszins andere vorm op, waarna het onderzoek op de aangegeven wijze kan worden voortgezet, enzovoorts. Deze stappen worden alle in het algemene geval teruggevonden.

5. Het iteratieproces bij de simplexmethode

Het iteratieproces bij de simplexmethode kan vanuit twee verschillende gezichtspunten worden bekeken. In de eerste plaats kunnen wij het zien als het voortdurend transformeren van vergelijkingen, zoals in paragraaf 4 gedaan is en in de tweede plaats kunnen wij het beschouwen als het uitdrukken van alle vectoren A_i in een aantal hiervan, die tezamen een basis van de ruimte vormen. De

eerste methode is de eenvoudigste, doch de tweede maakt het vergelijken van verschillende versies van de simplexmethode gemakkelijker. Beide methoden zullen wij in deze paragraaf beschrijven.

Het iteratieproces gezien als het transformeren van vergelijkingen

Het stelsel vergelijkingen (3.3) bezit wegens het niet-negatief zijn van de rechterleden de triviale oplossing:

$$\begin{aligned} x_h &= 0 & (h=1, \dots, p) \\ x_{p+i} &= a_{i0} & (i=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Alleen de verschilvariabelen kunnen een waarde > 0 bezitten.

Wij onderstellen nu dat er een $k \leq p$ bestaat waarvoor één of meer van de coëfficiënten van de variabele x_k positief zijn. Het is dan eenvoudig om nog een andere oplossing van (3.3) te geven. Kiezen wij $x_1 = \dots = x_{k-1} = 0$, $x_k = \theta$, $x_{k+1} = \dots = x_p = 0$, dan gaan de vergelijkingen (3.3) over in

$$a_{ik} \cdot \theta + x_{p+i} = a_{i0} \quad (5.2)$$

waaruit blijkt dat voor de overige x -variabelen moet gelden

$$x_{p+i} = a_{i0} - a_{ik} \cdot \theta \quad (5.3)$$

Deze oplossing is alleen dan toelaatbaar, wanneer $x_k = \theta \geq 0$ is en ook de $x_{p+i} \geq 0$ zijn. Aan de laatste eis is voldaan wanneer

$$a_{i0} - a_{ik} \cdot \theta \geq 0 \quad (5.4)$$

is. Voor $a_{ik} \leq 0$ is dit zeker in orde; voor iedere $a_{ik} > 0$ moet gelden:

$$\theta \leq \frac{a_{i0}}{a_{ik}}.$$

Wij kunnen dus θ niet groter kiezen dan het kleinste van de positieve quotiënten $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$.

Wij nemen aan dat dit minimum bereikt wordt voor precies één waarde van i ¹⁾; is dit $i = r$, dan geven wij x_k de waarde

1) Wanneer dit niet het geval is, spreken wij van ontaarding; hoe men dan te werk moet gaan wordt besproken in paragraaf 8.

$$x_k = \theta = \frac{a_{r0}}{a_{rk}} \quad (5.5)$$

De bijbehorende oplossing

$$x_1 = \dots = x_{k-1} = x_{k+1} = \dots = x_p = 0, \quad x_k = \frac{a_{r0}}{a_{rk}} \quad (5.6)$$

$$x_{p+i} = a_{i0} - a_{ik} \frac{a_{r0}}{a_{rk}}$$

voldoet dan aan de gestelde eisen.

Dit is duidelijk af te lezen uit de vergelijkingen (3.3), wanneer wij deze schrijven in een iets andere vorm. Daartoe delen wij de r^e vergelijking door a_{rk} ; de i^e vergelijking ($i \neq r$) verminderen wij met a_{ik}/a_{rk} maal de r^e vergelijking. Het stelsel (3.3) krijgt dan de vorm (5.7) (zie blz. 21).

Alle oplossingen, die voldoen aan (3.3) voldoen ook aan (5.7) en andersom. Wij kunnen het probleem (3.3), (3.5) dus vervangen door het aequivalente probleem (5.7), (3.5). De variabelen x_k en x_{p+i} ($i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, m$) komen alle in slechts één vergelijking voor en wij vinden dus een oplossing van (5.7), wanneer wij deze variabelen gelijkstellen aan de rechter leden van de vergelijkingen waarin ze voorkomen en de overige variabelen 0 kiezen:

$$x_k = \frac{a_{r0}}{a_{rk}},$$

$$x_{p+i} = a_{i0} - a_{ik} \frac{a_{r0}}{a_{rk}}, \quad (i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, m) \quad (5.7)$$

$$x_h = 0, \quad (h = 1, \dots, k-1, k+1, p, p+r).$$

Dit is juist de oplossing, die wij hierboven hadden verkregen.

Wij vergelijken nu de opbrengst z'_0 , behorende bij deze oplossing met de vorige opbrengst z_0 . Om de redenering algemeen te houden maken wij er geen gebruik van, dat sommige c 's 0 zijn. De opbrengsten z_0 en z'_0 zijn respectievelijk (vgl. (3.5), (5.1) en (5.6))

$$z_0 = c_{p+1}a_{10} + \dots + c_{p+r}a_{r0} + \dots + c_na_{m0} \quad (5.8)$$

en

$$z'_0 = c_k \frac{a_{r0}}{a_{rk}} + c_{p+1} \left(a_{10} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{r0} \right) + \dots + c_{p+r} \cdot 0 + \dots +$$

$$+ c_n \left(a_{m0} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{r0} \right) \quad (5.9)$$

- 21 -

$$\begin{aligned}
 & \left(a_{11} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{r1} \right) x_1 + \dots + \left(a_{1k} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{rk} \right) x_k + \dots + \left(a_{1p} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{rp} \right) x_p + x_{p+1} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} x_{p+r} = a_{10} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{r0} \\
 & \left(a_{21} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} a_{r1} \right) x_1 + \dots + \left(a_{2k} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} a_{rk} \right) x_k + \dots + \left(a_{2p} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} a_{rp} \right) x_p + x_{p+2} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} x_{p+r} = a_{20} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} a_{r0}
 \end{aligned}$$

•
•
•

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_{r1}}{a_{rk}} x_1 + \dots + x_k + \dots + \frac{a_{rp}}{a_{rk}} x_p + \dots + \frac{1}{a_{rk}} x_{p+r} = \frac{a_{r0}}{a_{rk}} \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

$$\left(a_{m1} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{r1} \right) x_1 + \dots + \left(a_{mk} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{rk} \right) x_k + \dots + \left(a_{mp} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{rp} \right) x_p + x_{p+m} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} x_{p+r} = a_{m0} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{r0}$$

of

$$z'_0 = z_0 + \frac{a_{r0}}{a_{rk}} (c_k - \sum_{i=1}^m c_{p+i} a_{ik}) \quad (5.10)$$

Voeren wij de afkorting

$$z_k = \sum_{i=1}^m c_{p+i} a_{ik} \quad (5.11)$$

in en schrijven wij weer θ voor $\frac{a_{r0}}{a_{rk}}$, dan gaat (5.10) over in

$$z'_0 = z_0 + \theta(c_k - z_k) \quad (5.12)$$

De opbrengst kan dus alleen dan groter worden, wanneer $c_k - z_k > 0$ is (θ was ≥ 0). Om z_0 te vergroten zal men dus een variabele zoeken waarvoor geldt $c_k - z_k > 0$. Wanneer dit voor meer dan één variabele het geval is, dan kan men met die variabele werken waarvoor $c_k - z_k$ maximaal is, noodzakelijk is dit echter niet (vgl. paragraaf 9).¹⁾

Vervolgens wordt onderzocht hoe groot men deze variabele kan kiezen. De grens hiervoor wordt bepaald door het kleinste van de quotiënten a_{i0}/a_{ik} , waarin $a_{ik} > 0$ is. Door een geschikte omvorming van de vergelijkingen kunnen wij de waarden van de variabelen, die in de nieuwe oplossing niet 0 zijn, direct aflezen uit de rechter leden van de vergelijkingen. Het resultaat is dan, dat er weer m x -en een waarde ongelijk 0 aannemen, doch dat nu $x_k \neq 0$ is in de plaats van x_{p+r} , die in de oude oplossing een positieve waarde had.

Als het nieuwe schema dezelfde eigenschappen bezit als het oude, kunnen deze berekeningen uiteraard ook daar weer op worden toegepast.

De simplexmethode past deze gedachtengang systematisch toe. Het is niet nodig voortdurend alle vergelijkingen op te schrijven; men kan volstaan met tabellen, waarin de coëfficiënten uit deze vergelijkingen opgenomen zijn en waaruit men bovendien kan aflezen hoe groot $c_j - z_j$ is voor alle waarden van j .

1) Is het verschil voor meer dan één index maximaal, dan kan men willekeurig één van deze nemen.

Het iteratieproces gezien als het voortdurend kiezen van een andere basis

Wij sluiten aan bij de formulering van het probleem, zoals deze door (3.6), (3.7) en (3.8) gegeven is.

Laten wij aannemen dat wij beschikken over de basisoplossing $X = (x_{10}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$. De met deze oplossing corresponderende basisvectoren zijn $A_1, \dots, A_m$. Alle vectoren $A_j (j=1, \dots, n)$ kunnen dus geschreven worden in de vorm

$$A_j = \sum_{i=1}^m A_i x_{ij} \quad (5.13)$$

Volgens (3.7) geldt

$$A_0 = \sum_{i=1}^m A_i x_{i0} \quad (5.14)$$

formule (5.13) is dus ook voor $j=0$ juist. De m elementen van X die dezelfde indices hebben als de basisvectoren vormen samen de m -dimensionale vector X_0 .

Voegen wij de vectoren $A_1, \dots, A_m$ samen tot een vierkante matrix B , dan kunnen (5.13) en (5.14) ook geschreven worden in de vorm

$$A_j = B \cdot X_j \quad (j = 0, \dots, n) \quad (5.15)$$

(waarin $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$).

Opmerking. In tegenstelling tot de vector X_0 waarvan alle elementen ≥ 0 moeten zijn (vgl. (3.8)) kunnen de elementen van de vectoren X_j zowel positief, nul als negatief zijn.

Uit (5.13) volgt dat A_j gelijkwaardig is aan een bepaalde lineaire combinatie van de vectoren $A_1, \dots, A_m$. Aan de voorwaarde (3.7) blijft dus voldaan, wanneer wij in (5.14) de vectoren $A_1, \dots, A_m$ in de juiste verhouding genomen, vervangen door een andere vector, bijvoorbeeld A_k . Voeren wij in (5.14) de nieuwe vector in met coëfficiënt $\theta (> 0)$, dan betekent dit dat in de nieuwe toegelaten vector X' , het element $x'_{k0} = \theta$ is. De functie z wordt dus $c_k \theta$ groter. Anderzijds worden de positieve elementen van X_0 verminderd met θ keer de elementen van X_k , waardoor de functie $\theta \cdot \sum_{i=1}^m c_i x_{ik}$ kleiner wordt. De som $\sum_{i=1}^m c_i x_{ik}$ wordt aangegeven met z_k .

De nieuwe waarde z'_0 van de te maximaliseren functie kan uit de oude gevonden worden met de formule

$$z'_0 = z_0 + \theta(c_k - z_k). \quad (5.16)$$

De transformatie maakt de functie dus groter wanneer $\theta(c_k - z_k) > 0$ is. Daar $\theta \geq 0$ moet zijn, volgt uit (5.16) wederom dat z_0 slechts kan toenemen wanneer $c_k - z_k > 0$ is of $z_k - c_k < 0$. Indien de waarde van z_0 inderdaad groter wordt door de variabele x_k een positieve waarde te geven, dan ligt het voor de hand, dit in zo sterk mogelijke mate te doen. Om na te gaan hoe ver men hiermee kan gaan tellen wij θ ($\theta > 0$) keer vergelijking (5.13) voor $j=k$ op bij (5.14). Het resultaat luidt

$$\sum_{i=1}^m A_i(x_{i0} - \theta x_{ik}) + A_k \cdot \theta = A_0. \quad (5.17)$$

Een oplossing moet voldoen aan (3.8) en dus moet gelden

$$\theta \geq 0, \quad x_{i0} - \theta x_{ik} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (5.18)$$

Wegens $\theta > 0$ en $x_{i0} \geq 0$ is hieraan voor iedere $x_{ik} \leq 0$ voldaan. De waarde van θ kan dus hoogstens gelijk worden gekozen aan het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ met $x_{ik} > 0$. Gezien het bovenstaande kiezen wij steeds

$$\theta = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ik}} \quad (x_{ik} > 0). \quad (5.19)$$

Laat dit minimum bereikt worden voor $i=r$ en alleen voor $i=r$; dan is $\theta = \frac{x_{r0}}{x_{rk}}$. Als nieuwe toegelaten vector X' hebben wij nu gevonden

$$X' = (x_{10} - \frac{x_{r0}}{x_{rk}} x_{1k}, \dots, x_{r-1,0} - \frac{x_{r0}}{x_{rk}} x_{r-1,k}, 0, x_{r+1,0} - \frac{x_{r0}}{x_{rk}} x_{r+1,k}, \dots, x_{m0} - \frac{x_{r0}}{x_{rk}} x_{mk}, 0, \dots, 0, \frac{x_{r0}}{x_{rk}}, 0, \dots, 0). \quad (5.20)$$

Het deel van de vector X' dat met de nieuwe basisvectoren correspondeert (dus met $A_1, \dots, A_{r-1}, A_{r+1}, \dots, A_m, A_k$) wordt weer X'_0 genoemd. De nieuwe waarden van de variabelen, die zowel in de oude als in de nieuwe oplossing voorkomen, worden volgens (5.20) gevonden door de transformaties

$$x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{rk}} \cdot x_{ik} \quad (i \neq k). \quad (5.21)$$

De waarde van de variabele die in de nieuwe oplossing positief is, maar in de oude nul, volgt uit

$$x'_{k0} = \frac{x_{r0}}{x_{rk}}. \quad (5.22)$$

Substitueert men deze oplossing in (3.7), dan vindt men

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i (x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{rk}} x_{ik}) + A_k \frac{x_{r0}}{x_{rk}} = A_0. \quad (5.23)$$

De nieuwe basis is $\mathcal{B}' = (A_1, \dots, A_{r-1}, A_{r+1}, \dots, A_m, A_k)$; alle vectoren A_j kunnen uitgedrukt worden in de vorm van een lineaire combinatie van de vectoren in $\mathcal{B}'$. De nieuwe coëfficiënten kunnen op de volgende manier uit de oude worden afgeleid. Uit (5.13) volgt voor $j=k$

$$A_r = \frac{1}{x_{rk}} (A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i x_{ik}), \quad (5.24)$$

hetgeen na substitutie in (5.13) voor A_j leidt tot

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i x_{ij} + \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i x_{ik})$$

of

$$A_j = \frac{x_{rj}}{x_{rk}} A_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i (x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik}). \quad (5.25)$$

Op deze wijze is A_r geëlimineerd uit (5.13). De nieuwe coëfficiënten van de vectoren die zowel in $\mathcal{B}$ als in $\mathcal{B}'$ voorkomen volgen uit

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \cdot x_{ik} \quad (i \neq k) \quad (5.26)$$

en die van de nieuw opgenomen vector A_k uit

$$x'_{kj} = \frac{x_{rj}}{x_{rk}}. \quad (5.27)$$

Deze formules zijn dus geheel analoog aan (5.21) respectievelijk (5.22). In vectornotatie luiden de nieuwe vergelijkingen

$$A_j = \mathfrak{B}' \cdot X_j' \quad (j = 0, \dots, n) \quad (5.28)$$

Uitgaande van de nieuwe toegelaten basisoplossing X_0' kan met behulp van de vectoren X_j' dezelfde redenering toegepast worden als met de vectoren X_0 en X_j is gedaan.

De nieuwe waarden $(z_j - c_j)'$ kunnen op eenvoudige wijze uit de oude worden afgeleid. Volgens de definitie van z_j , (5.26) en (5.27) is

$$\begin{aligned} (z_j - c_j)' &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m x_{ij}' c_i + x_{kj}' c_k - c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m (x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik}) c_i + \\ &+ \frac{x_{rj}}{x_{rk}} c_k - c_j = z_j - x_{rj} c_r - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \sum_{i=1}^m c_i x_{ik} + \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{rk} c_r + \\ &+ \frac{x_{rj}}{x_{rk}} c_k - c_j = (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (z_k - c_k), \\ \text{dus} \quad (z_j - c_j)' &= (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (z_k - c_k) \quad (5.29) \end{aligned}$$

Deze formule heeft dezelfde structuur als (5.26): de nieuwe verschillen worden uit de oude gevonden door deze te verminderen met $\frac{x_{rj}}{x_{rk}}$ maal het oude element, behorende bij A_k .

Tenslotte blijkt uit een vergelijking van (5.16) en (5.29) dat z_0' uit z_0 gevonden wordt door een transformatie van de vorm (5.29), wanneer men hierin $c_0 = 0$ substitueert en voor θ de door (5.19) bepaalde waarde $\frac{x_{r0}}{x_{rk}}$.

Er is dus een grote overeenkomst in alle transformatieformules: van alle vectoren X_j' wordt één element gevonden door het oude te delen door x_{rk} , terwijl alle andere elementen van de vectoren X_j' en de nieuwe verschillen $(z_j - c_j)'$ ($j = 0, \dots, n$) bepaald worden door de geheel analoge formules (5.21), (5.26) en (5.29).

Men kan nu laten zien dat de beide iteratieprocessen, die van het transformeren van vergelijkingen en die van het steeds kiezen van een andere basis, leiden tot precies hetzelfde rekenschema.

Laten wij aannemen dat (3.3) en (3.7) hetzelfde stelsel vergelijkingen voorstellen. De vectoren $A_{n-m+1}, A_{n-m+2}, \dots, A_n$ zijn dan eenheidsvectoren. Wij kiezen nu in de eerste stap deze eenheidsvectoren als basis en geven de bijbehorende matrix met J aan. Formule (5.15) gaat dan over in

$$A_j = J \cdot X_j \quad (j = 0, \dots, n) \quad (5.30)$$

en dus is in de eerste stap (vgl. stelling 5.1) uit hoofdstuk VIII)

$$X_j = A_j. \quad (5.31)$$

De vector X_j is dus identiek met de vector A_j , of anders gezegd: de elementen van X_j zijn de coëfficiënten van de variabele x_j in het vergelijkingstelsel (3.3). Dit geldt voor alle j , wanneer wij tenminste de rechterleden van (3.3) identificeren als de vector X_0 . De basisvariabelen zijn de variabelen, die in (3.3) alleen één keer met coëfficiënt één voorkomen. Vervolgens gaan wij transformeren. Schrijft men de relaties tussen de nieuwe en de oude coëfficiënten in de vergelijkingen in formulevorm op, dan ziet men dat deze identiek zijn met de transformatieformules (5.21), (5.22), (5.26) en (5.27); vergelijk ook (5.7) met deze formules. Wij passen dus om de nieuwe coëfficiënten te vinden dezelfde transformatieformules toe als bij het uitdrukken van de vectoren A_j in de nieuwe basis, en de nieuwe coëfficiënten van de variabele x_j vormen tezamen dan ook de vector X'_j welke uit (5.28) kan worden afgeleid. In de getransformeerde vergelijkingen zijn de variabelen die slechts in één vergelijking met coëfficiënt één voorkomen en verder niet, weer de basisvariabelen. Hetzelfde geldt in iedere volgende stap.

Nu wij weten dat de oorspronkelijke en de herleide coëfficiënten a_{ij} identiek zijn met de elementen van de oorspronkelijke, respectievelijk de herleide vectoren X_j , kunnen wij inzien dat het gerechtvaardigd was, zowel voor de som $\sum_{i=1}^m c_i a_{ik}$ (vgl. (5.11)) als voor de som $\sum_{i=1}^m c_i x_{ik}$ (vgl. blz. 24) hetzelfde symbool z_k te gebruiken. In beide beschrijvingen van de simplexmethode bepalen dus dezelfde verschillen $z_j - c_j$ of het zinvol is een nieuwe variabele x_j een positieve waarde te geven. Welke waarde dit is wordt door dezelfde quotiënten bepaald (vgl. (5.5) en (5.9)), evenals de variabele die in de nieuwe stap de waarde nul aanneemt.

Beide interpretaties kunnen dus door elkaar gebruikt worden.

6. Het rekenschema

Voor het opstellen van het rekenschema gaan wij uit van de vergelijkingen (3.3). De uitgangstabel voor onze berekeningen is tabel 6.I. Deze bevat alle coëfficiënten uit de vergelijkingen (3.3); de rechterleden zijn in de eerste kolom opgenomen, de coëfficiënten van het eerste stelsel basisvariabelen ($x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$) in de kolommen twee t/m $m+1$. Boven iedere kolom is het vectorsymbool van de in die kolom vermelde coëfficiënten geschreven.

Tabel 6.I

Oorspronkelijke coëfficiënten

($n = p + m$)

x_0	x_{p+1}		x_{p+r}		x_n	x_1		x_k		x_p
a_{10}	1		0		0	a_{11}		a_{1k}		a_{1p}
.	.		.		.	.		.		.
.	.		.		.	.		.		.
.	.		.		.	.		.		.
.	.		.		.	.		.		.
a_{r0}	0		1		0	a_{r1}		a_{rk}		a_{rp}
.	.		.		.	.		.		.
.	.		.		.	.		.		.
.	.		.		.	.		.		.
.	.		.		.	.		.		.
a_{m0}	0		0		1	a_{m1}		a_{mk}		a_{mp}

Deze tabel breiden wij uit met twee kolommen. Links van de kolom met het hoofd x_0 schrijven wij een kolom met het hoofd B, waarin van boven naar beneden de basisvariabelen $x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$ ($= x_n$) opgenomen worden (vgl. tabel 6.II). Links daarvan komt nog een kolom, waarin wij de c-waarden uit (3.5) invullen, die dezelfde indices hebben, als de x-variabelen uit de B kolom; in dit geval worden het allemaal nullen.

Aan de onderkant van tabel 6.I wordt een rij toegevoegd, waarin de getallen $z_j - c_j$ komen te staan; z_j is gedefinieerd door (5.11) en hieruit blijkt, dat z_j de som is van de produkten

der elementen uit de C-kolom en de X_j -kolom. In de X_0 -kolom komt te staan $z_0 - c_0$, waarin c_0 weer gelijk aan nul gesteld wordt. Het betreffende vakje bevat dus het getal z_0 . Volgens (5.8) is dit getal gelijk aan de som van de produkten der elementen uit de C- en de X_0 -kolom (de berekening van z_0 is dus analoog aan die van z_j voor $j \neq 0$). Omdat in de C-kolom alleen nullen staan, zijn alle z_j hier gelijk aan nul en dus is $z_j - c_j = -c_j$.

Het resultaat van deze veranderingen is tabel 6.II; voor alle constanten, waarvan wij de getalwaarde kennen, is deze ingevuld; blanco hokjes geven nullen aan.

Tabel 6.II

Eerste stap: de triviale oplossing

C	B	X_0	X_{p+1}	...	X_{p+r}	...	X_{p+m}	X_1	...	X_k	..	X_p
	x_{p+1}	a_{10}	1					a_{11}	...	a_{1k}	..	a_{1p}
	.	.		.				.	...	.	..	.
	.	.		.				.	...	.	..	.
	.	.		.				.	...	.	..	.
	.	.		.				.	...	.	..	.
	x_{p+r}	a_{r0}			1			a_{r1}	...	a_{rk}	..	a_{rp}
	.	.			.			.	...	.	..	.
	.	.			.			.	...	.	..	.
	.	.			.			.	...	.	..	.
	.	.			.			.	...	.	..	.
	x_{p+m}	a_{m0}					1	a_{m1}	...	a_{mk}	..	a_{mp}
$z_j - c_j$								$-c_1$	...	$-c_k$	..	$-c_p$

De eerste oplossing die wij gaven (de triviale) kan men uit deze tabel direct aflezen; de variabelen in de B-kolom bezitten de waarden die in de X_0 -kolom gegeven zijn, de andere zijn 0. De opbrengst z_0 (die voor de triviale oplossing gelijk aan 0 is) staat in het laatste vakje van de X_0 -kolom.

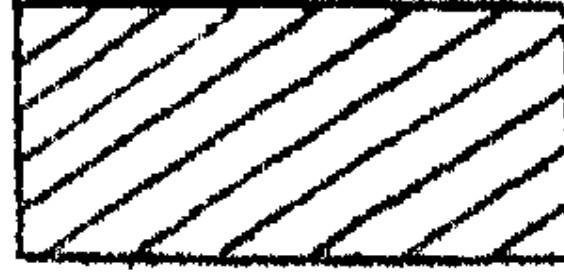
Uitgaande van deze eerste stap tot een oplossing willen wij nu een volgende stap construeren. Daartoe beschouwen wij evenals in paragraaf 5 eerst het geval, waarin aan de drie volgende voor-

waarden is voldaan:

- 1) de laatste rij van tabel 6.II bevat voor $j > 0$ één of meer negatieve elementen,
- 2) voor $j > 0$ bevat iedere kolom, die in de laatste regel een negatief getal heeft, één of meer positieve elementen,
- 3) als het minimum in de laatste rij bereikt wordt voor $j = k$, dan wordt het minimum van de quotiënten a_{i0}/a_{ik} , waarin $a_{ik} > 0$, voor precies één waarde van i bereikt.

Volgens (5.12) was verbetering van de opbrengst mogelijk, indien voor een bepaalde waarde van j $c_j - z_j$ groter was dan nul. ¹⁾ In tabel 6.II betekent dit dat $z_j - c_j < 0$ moet zijn en volgens 1) is verbetering dus inderdaad mogelijk.

De tabel waaruit de nieuwe oplossing kan worden afgelezen, wordt als volgt geconstrueerd. Bepaal eerst de waarde k , waarvoor $z_j - c_j$ minimaal is; zoek vervolgens het kleinste van de quotiënten a_{i0}/a_{ik} met $a_{ik} > 0$ op. In tabel 6.III zijn deze twee bewerkingen schematisch aangegeven. Tabel 6.IV laat zien hoe uit tabel 6.II de nieuwe tabel ontstaat; hiertoe moet men het volgende doen:

- 1) vervang in de C- en de B-kolom c_{p+r} en x_{p+r} door c_k resp. x_k ,
- 2) deel alle elementen uit  door a_{rk} ,
- 3) verminder alle andere elementen uit de kolommen $X_0, \dots, X_n$ met de aangegeven produkten (in de kolom X_k komen hierdoor, behalve de in het schema aangegeven 1, slechts nullen te staan),
- 4) laat de vakjes  ongewijzigd.

Op dezelfde wijze, waarop wij uit tabel 6.II de oude oplossing konden aflezen, kunnen wij de nieuwe bepalen uit tabel 6.IV. De variabelen in de B-kolom bezitten de, in de X_0 -kolom gegeven waarden, de andere x -en zijn nul. De nieuwe opbrengst is te vinden in het laatste vakje van de X_0 -kolom. Het is niet moeilijk na te gaan dat de getallen in tabel 6.IV de coëfficiënten zijn uit het vergelijkingstelsel (5.7).

Wanneer de nieuwe tabel ook aan de drie op blz. 31 genoemde voorwaarden voldoet, kan hetzelfde procédé opnieuw worden toegepast. In welke situatie wij verkeren als de tabel niet meer aan één of meer van deze eisen voldoet, zullen wij in de paragrafen 7 en 8 bespreken.

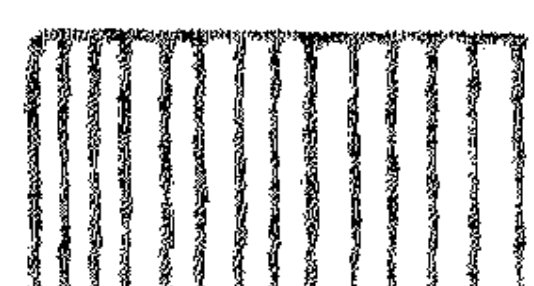
- 1) Hiervoor is ook nog noodzakelijk dat $\theta > 0$ is; door de derde onderstelling is hier steeds aan voldaan.

Tabel 6.III

Berekeningen uit te voeren met de constanten van tabel 6.II

kleinste $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$ →

C	B	X_0		X_k	
			←delen door→		
	x_{p+r}		←delen door→		
			←delen door→		
			←delen door→		
$z_j - c_j$	X				

 $a_{ik} > 0$
 $z_j - c_j < 0 \ (j > 0)$

↑ $z_j - c_j$ minimaal

Tabel 6.IV

Tweede stap: eerste verbeterde oplossing

regel met kleinste $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$ →

C	B	X_0	X_j	X_k	X_l	
c_k	x_k					
$z_j - c_j$	X					

↑ kolom met kleinste $z_j - c_j$

Ter illustratie van het voorgaande geven wij hieronder de tabellen, die behoren bij voorbeeld 1.3, waarbij wij uitgaan van de vergelijkingen (4.1) en (4.2). Lege hokjes geven steeds nullen aan.

Tabel 6.V

Eerste stap: de triviale oplossing

C	B		x_0	x_3	x_4	x_1	x_2
	x_3		3600	1		2	3
	x_4		3600		1	5	2
$z_j - c_j$						-3	-4

Tabel 6.VI

Opsporing van k en r

	C	B		x_0	x_3	x_4	x_1	x_2
kleinste $\rightarrow$		x_3		3600	1		2	3
$\frac{a_{10}}{a_{1k}}$		x_4		3600		1	5	2
$(\rightarrow r=1)$	$z_j - c_j$						-3	-4

$a_{1k} > 0$

$\uparrow$ kleinste $z_j - c_j$
 $(\rightarrow k=2)$

Tabel 6.VII

Verdere bewerking (oude cijfers tussen haakjes)

C	B		x_0	x_3	x_4	x_1	x_2
1) → 4	x_2		1200	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
	x_4		(3600)	$(0) - \frac{2}{3}$	(1)	(5)	(2)
$z_j - c_j$						(-3)	(-4)

← 2)

3)

0 prod. (arrow from $\frac{1}{3}$ to (1))

1) 4 en x_2 in de plaats van 0 en x_3 .

2) de overeenkomstige elementen uit tabel 6.V, gedeeld door $a_{12}=3$

3) elementen verminderen met produkten, zoals aangegeven.

In tabel 6.VII zijn de onder tabel 6.IV vermelde punten 1) en 2) volledig uitgevoerd en punt 3) voor één geval; tabel 6.VIII bevat het uiteindelijke resultaat.

Tabel 6.VIII

Tweede stap: eerste verbeterde oplossing

C	B		x_0	x_3	x_4	x_1	x_2
4	x_2		1200	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
	x_4		1200	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	0
$z_j - c_j$			4800	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0

Tabel 6.IX

Derde stap: tweede verbeterde oplossing

C	B		x_0	x_3	x_4	x_1	x_2
4	x_2		982	$\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	1
3	x_1		327	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1	0
$z_j - c_j$			4909	$\frac{42}{33}$	$\frac{1}{11}$	0	0

De tabellen 6.V, 6.VIII en 6.IX corresponderen met de vergelijkingenstelsels (4.1), (4.2) respectievelijk (4.4), (4.5), respectievelijk (4.6), (4.7). De productieprogramma's zijn respectievelijk nul schroeven S_1 , nul schroeven S_2 ; nul schroeven S_1 , 1200 schroeven S_2 en 327 schroeven S_1 , 982 schroeven S_2 . De winst klimt van nul via 4800 tot 4909.

Wanneer wij de verschillende onderdelen van iedere stap nog eens expliciet formuleren, dan vinden wij het volgende:

- 1) bepaal, uitgaande van een toegelaten basisoplossing X_0 met bijbehorende basis $\mathcal{B}$ de vectoren X_j door de transformatie $A_j = \mathcal{B} \cdot X_j$ of $X_j = \mathcal{B}^{-1} \cdot A_j$ ($j = 1, \dots, n$); wanneer van een basis van eenheidsvectoren uitgegaan kan worden, zoals bijvoorbeeld bij de triviale oplossing het geval is, dan is $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{I}$ en dus $X_j = A_j$.
- 2) bepaal de verschillen $z_j - c_j$ voor alle vectoren A_j die niet in de basis zijn opgenomen (voor de vectoren die wel in de basis zijn opgenomen hebben deze verschillen de waarde nul);
- 3) wanneer één of meer van de verschillen $z_j - c_j$ negatief zijn, bepaal dan het kleinste van deze verschillen; laat dit bereikt worden voor $j = k$ en alleen voor $j = k$;
- 4) bepaal het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ voorzover $x_{ik} > 0$ is; laat dit minimum bereikt worden voor $i = r$ en alleen voor $i = r$;
- 5) beschouw als nieuwe basis $\mathcal{B}'$ van de ruimte de oude vectoren, afgezien van A_r en aangevuld met A_k ;
- 6) druk de vectoren A_j ($j=0, \dots, n$) door middel van de transformaties (5.21), (5.22), (5.26) en (5.27) uit in de nieuwe basis $\mathcal{B}'$; hiermee zijn de nieuwe vectoren X'_j ($j=0, \dots, n$) gevonden;
- 7) bepaal de nieuwe variabelen $(z_j - c_j)'$ ($j=0, \dots, n$) door middel van de transformaties (5.29);
- 8) zie punt 3).

Enzovoorts.

Wij besluiten deze paragraaf met een controlemiddel, waarmee men stapsgewijs kan nagaan of er bij de berekeningen fouten zijn gemaakt.

Aan de simplextabel (vgl. b.v. tabel 6.II) voegen wij nog een rij toe, waarin wij de som van de elementen van iedere kolom opnemen. Deze somrij wordt bij de berekening van het nieuwe schema op dezelfde wijze behandeld als de andere rijen, maar doet niet mee bij de bepaling van de x die uit de B-kolom moet worden verwijderd. Deze rij bestaat in de nieuwe tabel uit getallen, die gelijk zijn aan de sommen van de elementen uit de overeenkomstige kolommen van de nieuwe tabel, verminderd met de getallen uit de rij, waarin de nieuwe variabele is ingevoerd.

In het behandelde voorbeeld bedragen de sommen van de elementen uit de kolommen van tabel 6.VIII respectievelijk

$$7200, 1, 1, 4, 1.$$

Passen wij hierop de in tabel 6.IV aangegeven bewerkingen toe, dan vinden wij

$$7200 - 4 \cdot 327 \frac{3}{11} = 5890 \frac{10}{11},$$

$$1 - 4 \left(-\frac{2}{11} \right) = \frac{19}{11},$$

$$1 - 4 \cdot \frac{3}{11} = -\frac{1}{11}$$

$$4 - 4 \cdot 1 = 0,$$

$$1 - 4 \cdot 0 = 1,$$

terwijl de sommen van de elementen uit de eerste en derde rij van tabel 6.IX voor de afrondingen zijn:

$$981 \frac{9}{11} + 4909 \frac{1}{11} = 5890 \frac{10}{11},$$

$$\frac{5}{11} + \frac{14}{11} = \frac{19}{11},$$

$$-\frac{2}{11} + \frac{1}{11} = -\frac{1}{11},$$

$$0 + 0 = 0,$$

$$1 + 0 = 1.$$

Bij de volgende stap moet deze controleberekening toegepast worden op de werkelijke som en niet op de getallen, welke men op de hier aangegeven wijze in de somrij heeft gevonden.

7. Het bereiken van de optimale oplossing

In paragraaf 5 hebben wij gezien, dat het geven van een positieve waarde aan een variabele x_k , die nul is, alleen dan tot een hogere waarde van z_0 kan leiden, wanneer $c_k - z_k > 0$ is of $z_k - c_k < 0$. Dit suggereert dat het maximum van de functie bereikt is, zodra alle verschillen $z_j - c_j$ positief of nul zijn. Volgens de volgende stelling is dit inderdaad het geval.

Stelling 7.1

Wanneer in een bepaalde stap alle verschillen $z_j - c_j \geq 0$ zijn, dan is het maximum van de functie z_0 bereikt.

Bewijs: Laten in een stap $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ de basisvectoren zijn, zodat geldt

$$\sum_{i=i_1}^{i_m} x_{ij} A_i = A_j \quad (j=0, \dots, n) \quad (7.1)$$

en laat voor iedere $j (j=1, \dots, n)$ $z_j - c_j \geq 0$ zijn, dus

$$\sum_{i=i_1}^{i_m} c_i x_{ij} - c_j \geq 0 \quad (7.2)$$

Voor een willekeurige andere basis $A_{l_1}, \dots, A_{l_m}$ is

$$A_0 = \sum_{l=l_1}^{l_m} x_{l0} A_l = \sum_{l=l_1}^{l_m} x_{l0} \left(\sum_{i=i_1}^{i_m} x_{il} A_i \right) = \sum_{i=i_1}^{i_m} \left(\sum_{l=l_1}^{l_m} x_{l0} x_{il} \right) A_i \quad (7.3)$$

Aangezien volgens stelling 4.1 uit hoofdstuk VIII iedere vector op slechts één manier in de basisvectoren uitgedrukt kan worden volgt uit (7.1) voor $j=0$ en (7.3)

$$x_{l0} = \sum_{i=i_1}^{i_m} x_{l0} x_{il} \quad (i=i_1, \dots, i_m) \quad (7.4)$$

Kiest men $A_{l_1}, \dots, A_{l_m}$ als basis, dan is de bijbehorende waarde van de functie z_0 : $\sum_{l=l_1}^{l_m} c_l x_{l0}$. Deze waarde is hoogstens gelijk aan de bij $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ behorende waarde; immers met behulp van (7.2) en (7.4) vindt men

$$\begin{aligned} \sum_{l=1_1}^{1_m} c_l x_{l0} &\leq \sum_{l=1_1}^{1_m} \left(\sum_{i=1_1}^{1_m} c_i x_{il} \right) x_{l0} = \sum_{i=1_1}^{1_m} c_i \left(\sum_{l=1_1}^{1_m} x_{il} x_{l0} \right) = \\ &= \sum_{i=1_1}^{1_m} c_i x_{i0} . \end{aligned}$$

q.e.d.

Het iteratieproces wordt derhalve beëindigd zodra alle verschillen $z_j - c_j$ voor $j > 0$ positief of nul zijn.

Wanneer in een bepaalde stap nog negatieve verschillen $z_j - c_j$ bestaan en één van de bijbehorende kolommen geen positieve elementen bevat, kan de functie willekeurig groot gemaakt worden. Immers volgens paragraaf 5 kan de nieuwe variabele x_k een waarde krijgen die hoogstens gelijk is aan het minimum van de quotiënten $\frac{z_0}{a_{ik}}$ voor $a_{ik} > 0$. Zijn alle $a_{ik} \leq 0$, dan kan x_k dus willekeurig groot gemaakt worden en volgens (5.12) derhalve z_0 eveneens. In praktijkproblemen zal dit betekenen dat ofwel het gebruikte model niet realistisch is, ofwel dat de berekeningen fout zijn.

8. Gevallen, waarin het gegeven rekenschema niet zonder meer toepasbaar is.

Constructie van een toegelaten oplossing

In paragraaf 3 is ondersteld dat de bijvoorwaarden waaraan de variabelen moeten voldoen, ongelijkheden zijn, waarvan het linker lid hoogstens gelijk mag zijn aan het niet negatieve rechterlid (vgl. (3.2)). In dit geval werden de ongelijkheden getransformeerd tot vergelijkingen en was het niet moeilijk een stelsel x -waarden te vinden, die aan de voorwaarden voldeden. Wij noemden deze oplossing in de paragrafen 4 en 5 de triviale oplossing; het is een basisoplossing, waarvan de bijbehorende vectoren de m eenheidsvectoren zijn.

Wij beschouwen nu het geval waarin de bijvoorwaarden niet de genoemde gemakkelijke vorm bezitten. Ook in die gevallen gaat men vrijwel steeds uit van een basis bestaande uit eenheidsvectoren. Zijn deze reeds alle aanwezig, dan kan direct een toegelaten oplossing van het probleem gegeven worden (vgl. paragraaf 12). Wanneer dit niet het geval is, zorgen wij op kunstmatige wijze voor een dergelijk stelsel.

Laten wij eerst aannemen dat sommige voorwaarden vergelijkingen zijn; verschilvariabelen kunnen nu niet zonder meer toegevoegd worden, maar wel kan men er voor zorgen dat de rechterleden niet-negatief zijn. De in de voorwaarden aanwezige vergelijkingen kan men gebruiken om één of meer variabelen te elimineren. Men moet hiermee echter voorzichtig zijn, omdat ook de geëlimineerde variabele(n) in de uiteindelijke oplossing waarden ≥ 0 moeten bezitten. Hiervoor kan gezorgd worden door voor iedere geëlimineerde variabele een extra voorwaarde toe te voegen. Heeft men bijvoorbeeld de voorwaarde

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = a_{10} , \quad (8.1)$$

dan kan men schrijven

$$x_p = \frac{1}{a_{1p}} \left(a_{10} - \sum_{h=1}^{p-1} a_{1h}x_h \right) ,$$

waarmee x_p uit de andere voorwaarden kan worden geëlimineerd, terwijl men toevoegt de voorwaarde $x_p \geq 0$, of

$$\frac{1}{a_{1p}} \left(a_{10} - \sum_{h=1}^{p-1} a_{1h}x_h \right) \geq 0. \quad (8.2)$$

Men heeft op deze wijze dus een variabele minder en een ongelijkheid meer gekregen.¹⁾ Of deze procedure voordelen oplevert, hangt er onder andere van af, of het elimineren op eenvoudige wijze kan geschieden (vergelijk ook het laatste gedeelte van deze paragraaf).

Een andere methode, die men altijd kan toepassen, komt neer op het kunstmatig vormen van een stelsel eenheidsvectoren. Laten de m voorwaarden bestaan uit l gelijkheden en $m-l$ ongelijkheden:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p &= a_{10} \\ &\vdots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{lp}x_p &= a_{l0} \\ a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 \dots a_{l+1,p}x_p &\leq a_{l+1,0} \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p &\leq a_{m0} , \end{aligned} \quad (8.3)$$

1) Soms moet toch nog weer een extra variabele toegevoegd worden, zoals wij verderop zullen zien.

waarin de a_{10} alle ≥ 0 zijn.

In de gelijkheden voeren wij nu toch nieuwe variabelen μ_j in, maar wij doen dit in de vorm van denkbeeldige grondstoffen of iets dergelijks, die zeer kostbaar zijn. Wij maximaliseren dan niet

$$z_0 = \sum_{h=1}^p c_h x_h \quad (3.1)$$

maar

$$y_0 = \sum_{h=1}^p c_h x_h - M \sum_{j=1}^l \mu_j, \quad (8.4)$$

waarin M een zeer groot positief getal is. De optimale oplossing zal dan steeds zo weinig mogelijk van de variabelen $\mu_1, \dots, \mu_l$ bevatten, omdat deze de opbrengst of winst sterk drukken. Maken wij nu van de $m-1$ ongelijkheden op de gebruikelijke wijze gelijkheden door verschilvariabelen toe te voegen, dan luidt het nieuwe probleem:

Maximaliseer (8.4) onder de voorwaarden dat de variabelen $x_1, \dots, x_p, \mu_1, \dots, \mu_l, x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$ voldoen aan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + \mu_1 &= a_{10} \\ \vdots & \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{lp}x_p + \mu_l &= a_{l0} \\ a_{1+1,1}x_1 + a_{1+1,2}x_2 + \dots + a_{1+1,p}x_p + x_{p+1} &= a_{1+1,0} \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p + x_{p+m} &= a_{m,0} \end{aligned} \quad (8.5)$$

en alle bovendien ≥ 0 zijn.

Wij voegen aan (8.4) weer de variabelen $x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$ toe met coëfficiënt nul en dan heeft het probleem dezelfde vorm als die, gegeven in (3.3) en (3.5). Het is dus ook op de in de paragrafen 5 en 6 beschreven wijze oplosbaar.

Wanneer de optimale oplossing geen μ 's bevat, die ongelijk nul zijn, dan kan men bewijzen, dat deze oplossing ook de beste oplossing is van het probleem: (3.1) maximaliseren onder de voorwaarden (8.3). Bevat de optimale oplossing (bij voldoende groot gekozen M) wel μ 's die positief zijn, dan betekent dit, dat het oorspronkelijke probleem geen oplossing bezit, omdat aan de ge-

stelde voorwaarden (8.3) niet is te voldoen. De simplexmethode is dus ook een methode, waarmee men **kan** onderzoeken of aan een aantal voorwaarden kan worden voldaan.

Bevatten de voorwaarden ongelijkheden die niet de geschikte vorm bezitten, zoals bijvoorbeeld de voorwaarde

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sp}x_p \geq a_{s0} \quad (8.6)$$

met $a_{s0} \geq 0$, dan voegt men eerst een verschilvariabele x_{p+1} toe:

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sp}x_p - x_{p+1} = a_{s0} \quad (8.7)$$

en daarna een extra variabele μ

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sp}x_p - x_{p+1} + \mu = a_{s0} \quad (8.8)$$

De voorwaarde heeft dan weer dezelfde vorm als de in (8.5) opgegeven vergelijkingen. Het resultaat kan dus zijn dat in een voorwaarde zoals (8.6) twee extra variabelen opgenomen worden, een verschilvariabele die in de functie z_0 de coëfficiënt nul krijgt en een variabele μ , die hierin de coëfficiënt $-M$ krijgt.

Men kan op deze wijze dus alle lineaire programmeringsproblemen in een vorm krijgen, die geschikt is om de simplexmethode te beginnen met variabelen, welke corresponderen met een stelsel eenheidsvectoren.

Het enige bezwaar is dat soms veel variabelen toegevoegd moeten worden en daarom is het altijd raadzaam die methode te volgen, die het kleinste aantal extra variabelen vraagt. Een vaak bruikbare en eenvoudige transformatie is bijvoorbeeld de volgende.

In voorbeeld 1.2 was de opdracht het maken van een koperlegering, die minstens 18% koper moest bevatten en de bijbehorende ongelijkheid luidde (zie (1.3)):

$$51x_A + 11x_B + 14x_D + 36x_E \geq 18 \quad (8.9)$$

Men kan dit omzetten in een ongelijkheid van de gemakkelijke vorm door te bedenken, dat de legering hoogstens 82% aan andere stoffen dan koper mag bevatten. Het percentage aan andere stoffen dan koper is bij de grondstoffen resp. 49, 89, 86 en 64. Bij een legering, welke x_A ton A, x_B ton B, x_D ton D en x_E ton E bevat, moet dus voldaan zijn aan

$$49x_A + 89x_B + 86x_D + 64x_E \leq 82, \quad (8.10)$$

een ongelijkheid, die wel de vereiste vorm heeft. Op deze wijze bespaart men één variabele.

Een andere handige transformatie komt in paragraaf 10 nog ter sprake. Wij illustreren het hier behandelde aan voorbeeld 1.2. In de vorm van formules luidde dit probleem (zie (1.2), (1.3), (1.4) en (1.7)):

Minimaliseer

$$z_0 = 40x_A + 20x_B + 24x_D + 30x_E \quad (8.11)$$

onder de voorwaarden

$$x_A + x_B + x_D + x_E = 1 \quad (8.12)$$

$$51x_A + 11x_B + 14x_D + 36x_E \geq 18 \quad (8.13)$$

$$100x_B + 100x_D \leq 20. \quad (8.14)$$

In par. 3 merkten wij reeds op, dat het minimaliseren van een functie op hetzelfde neerkomt als het maximaliseren van het tegengestelde van die functie. Daarom zullen wij hier in plaats van z_0 te minimaliseren,

$$-z_0 = -40x_A - 20x_B - 24x_D - 30x_E \quad (8.15)$$

maximaliseren, daar dan de beschreven methoden zonder wijziging toegepast kunnen worden.

Van de drie voorwaarden voldoet alleen de laatste aan de oorspronkelijk gestelde eis, dat het linker lid kleiner of gelijk aan het rechter lid moest zijn en dat het rechter lid positief was. Wij hebben reeds gezien, dat (8.13) geschreven kan worden in de vorm

$$49x_A + 89x_B + 86x_D + 64x_E \leq 82. \quad (8.10)$$

De voorwaarden (8.14) en (8.10) worden op de gebruikelijke wijze in gelijkheden omgezet; aan (8.12) voegen wij een variabele μ toe, terwijl wij (8.15) vervangen door

$$y_0 = -40x_A - 20x_B - 24x_D - 30x_E - M\mu, \quad (8.16)$$

waarin M een groot positief getal is (vgl. (8.4)). De voorwaarden luiden dan

$$x_A + x_B + x_D + x_E + \mu = 1 \quad (8.17)$$

$$49x_A + 89x_B + 86x_D + 64x_E + \quad + x_5 = 82 \quad (8.18)$$

$$100x_B + 100x_D + x_6 = 20 \quad (8.19)$$

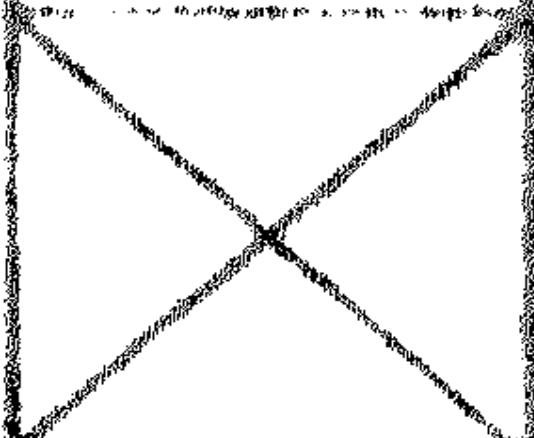
Het probleem is hiermee gebracht in de vorm (3.3), (3.5).

Hieronder volgen de tabellen die horen bij de achtereenvolgende stappen om de optimale oplossing te bereiken.

Tabel 8.I
Oorspronkelijke coëfficiënten

x_0	M	x_5	x_6	x_A	x_B	x_D	x_E
1	1	0	0	1	1	1	1
82	0	1	0	49	89	86	64
20	0	0	1	0	100	100	0

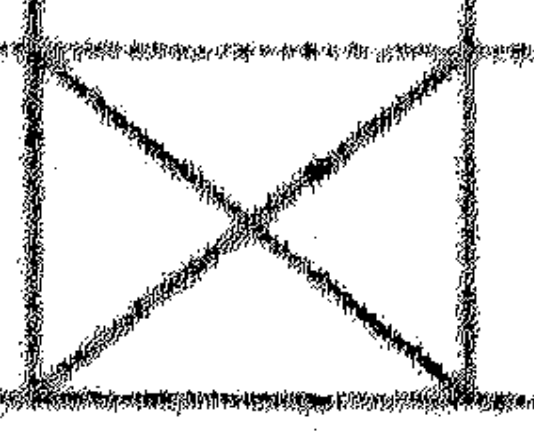
Tabel 8 II
Eerste stap: de triviale oplossing

C	B	x_0	M	x_5	x_6	x_A	x_B	x_D	x_E
-M	μ	1	1	0	0	1	1	1	1
0	x_5	82	0	1	0	49	89	86	64
0	x_6	20	0	0	1	0	100	100	0
$z_j - c_j$		-M	0	0	0	40 -M	20 -M	24 -M	30 -M

kleinste $\frac{a_{i0}}{a_{ik}} \rightarrow$

↑ kleinste $z_j - c_j$

Tabel 8.III
Tweede stap: eerste verbeterde oplossing

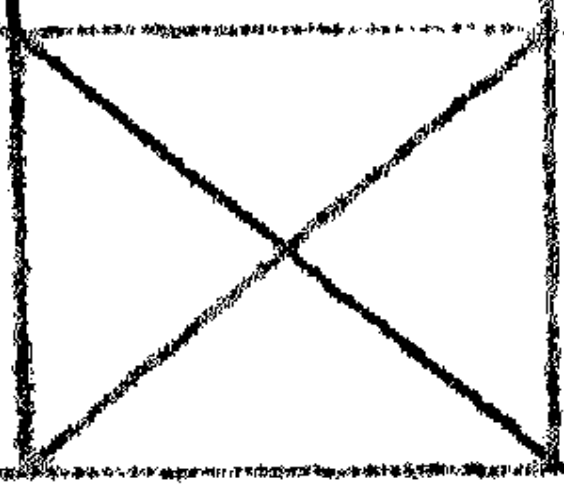
C	B	x_0	M	x_5	x_6	x_A	x_B	x_D	x_E
-M	μ	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
0	x_5	64,2	0	1	-0,89	49	0	-3	64
-20	x_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
$z_j - c_j$		-4 -0,8M	0	0	-0,2 +0,01M	40 -M	0	4	30 -M

kleinste $\frac{a_{i0}}{a_{ik}} \rightarrow$

↑ kleinste $z_j - c_j$.

Tabel 8.IV

Derde stap: tweede verbeterde oplossing

C	B	x_0	M	x_5	x_6	x_A	x_E	x_D	x_E
-30	x_E	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
0	x_5	13	-64	1	-0,25	-15	0	-3	0
-20	x_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
$z_j - c_j$		-28	$-30 + M$	0	0,1	10	0	4	0

Tabel 8.IV bevat volgens paragraaf 7 de optimale oplossing van het probleem, omdat vanaf de μ -kolom geen van de waarden $z_j - c_j$ kleiner dan nul zijn; immers ook $-30 + M$ is > 0 , daar M een zeer groot positief getal is. De optimale oplossing luidt dus

$$\begin{aligned} \mu = x_6 = x_A = x_D = 0 \\ x_E = 0,80 \quad x_5 = 13 \quad x_B = 0,20 \quad y_0 = -28 \end{aligned} \quad (8.20)$$

Wij merken op, dat in deze oplossing $\mu = 0$ is, waaruit volgt, dat (8.20) ook de optimale oplossing is van het door (8.11) t/m (8.14) gegeven probleem. Het minimum van (8.11) onder de gestelde voorwaarden is 28. De goedkoopste methode om 1 ton koperlegering te fabriceren is dus het mengen van 0,20 ton B en 0,80 ton E; het kopergehalte bedraagt dan $13 + 13 = 31\%$ en de kosten zijn 28.

Het optreden van de gelijkheid (8.12) is in dit probleem uiteraard essentieel. Wanneer het ook toegestaan was minder dan 1 ton te produceren en men wilde de kosten minimaliseren, dan zou de optimale oplossing luiden: produceer niets.

Via een weg die in principe dezelfde is als de hierboven geschetste hebben wij in paragraaf 1 hetzelfde resultaat gevonden. In dit eenvoudige voorbeeld was de daar gegeven methode korter, doch voor meer gecompliceerde vraagstukken is men aangewezen op een algemene methode.

Ontaarding

Wij zeggen dat een lineair programmeringsprobleem ontaard (gedegenereerd) is, wanneer bij één van de stappen niet voldaan

wordt aan de op blz. 30 genoemde voorwaarde 3). Het minimum van de quotiënten $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$ ($a_{ik} > 0$) wordt dan niet voor één waarde van i bereikt zodat met het gegeven rekenschema niet ondubbelzinnig een rij kan worden aangewezen. Wanneer men in dergelijke gevallen steeds op willekeurige wijze een rij kiest, dan is het in theorie mogelijk dat men het optimum niet vindt, doordat men in een kringetje rondraait ("cycling").¹⁾ Men kan het rekenschema zodanig uitbreiden dat dit voorkomen wordt. In de praktijk wordt dit uitgebreide schema meestal niet toegepast, omdat het genoemde verschijnsel alleen op een vrij gekunstelde manier verkregen kan worden.

Men kan de vrijheid in keuze beter gebruiken door die rij te kiezen, waarbij de noemer van de gelijke breuken het grootste is. De invloed van afrondingsfouten wordt hierdoor verkleind.

Meetkundig betekent ontaarding dat de vector A_0 uitgedrukt kan worden in minder dan m van de m -dimensionale vectoren A_1 . Stel dat het mogelijk is A_0 uit te drukken als lineaire combinatie van $A_1, \dots, A_{m-1}$. Bij de simplexmethode beschikken wij in iedere stap over een basis van de ruimte. Dit betekent dus dat de vectoren $A_1, \dots, A_{m-1}$ aangevuld moeten worden met een m^{de} vector en hiervoor komt in principe iedere van $A_1, \dots, A_{m-1}$ lineair onafhankelijke vector in aanmerking. Gaat men nu van een situatie, waarin A_0 geschreven is als combinatie van m vectoren over op een situatie, waarin slechts $m-1$ vectoren nodig zijn, dan moeten deze $m-1$ vectoren uiteraard in de nieuwe basis voorkomen, doch de keuze van de m^{de} vector ligt niet ondubbelzinnig vast: er kan bij de verwijdering van een vector uit de oude basis gekozen worden tussen twee verschillende vectoren. Overeenkomstige situaties komen voor als A_0 geschreven kan worden als lineaire combinatie van minder dan $m-1$ vectoren.

Gebruik maken van een reeds bekende oplossing

Vaak zal men in de situatie verkeren, waarin men reeds over een oplossing beschikt die aan de voorwaarden voldoet, doch waarvan niet bekend is of deze oplossing de optimale is. De vraag is dan of men, uitgaande van de reeds bekende oplossing sneller tot de optimale oplossing komt dan via de in 5 en 6 geschetste simplexmethode. In veel gevallen is dit inderdaad zo; men kan dan een zodanige transformatie

1) Men vergelijk het voorbeeld dat wordt gegeven op blz. 106-108 van het boek van S.I. GASS, Linear Programming, Methods and Applications, McGraw Hill (1958).

toepassen dat de reeds bekende oplossing de rol van basisoplossing gaat spelen in het nieuwe probleem.

Heel eenvoudig verlopen de transformaties, wanneer onder de voorwaarden een vergelijking van het type

$$\sum_{h=1}^p a_{ih} x_h = a_{i0} \quad (8.21)$$

voorkomt, zoals in voorbeeld 1.2 het geval was.

Laten wij aannemen, dat men in voorbeeld 1.2 tot dusverre een koperlegering G gefabriceerd heeft, welke voor 10% uit grondstof D en voor 90% uit grondstof E bestond. Er is dan aan de gestelde eisen voldaan, want de legering bevat

$$0,10 \cdot 14 + 0,90 \cdot 36 = 33,8\%$$

koper en bestaat voor 10% uit de grondstoffen B en D. De kosten bedragen 29,4 per ton.

Wij behandelen dit mengsel G nu alsof dit één van de ter beschikking staande grondstoffen is en trachten een legering te vinden, samengesteld uit A, B, D, E en G, die aan de eisen voldoet en die zo goedkoop mogelijk is.

Bestaat de legering uit x_A ton A, x_B ton B, x_D ton D, x_E ton E en x_G ton G, dan bedragen de kosten

$$z_0 = 40x_A + 20x_B + 24x_D + 30x_E + 29,4x_G \quad (8.22)$$

terwijl de voorwaarden (1.2), (1.3) en (1.4) overgaan in

$$x_A + x_B + x_D + x_E + x_G = 1 \quad (8.23)$$

$$51x_A + 11x_B + 14x_D + 36x_E + 33,8x_G \geq 18 \quad (8.24)$$

$$100x_B + 100x_D + 10x_G \leq 20. \quad (8.25)$$

Met (8.23) elimineren wij x_G uit (8.24) en (8.25); het resultaat is

$$-17,2x_A + 22,8x_B + 19,8x_D - 2,2x_E \leq 15,8. \quad (8.26)$$

$$-10x_A + 90x_B + 90x_D - 10x_E \leq 10. \quad (8.27)$$

Wij voegen aan de ongelijkheden (8.26) en (8.27) de verschillvariabelen x_6 en x_7 toe om ze te transformeren in gelijkheden. Omdat (8.23) reeds een variabele bevat, die alleen in deze vergelijking

voorkomt (nl. x_G), is het niet nodig aan deze vergelijking nog een variabele toe te voegen. Wij kunnen volgens de in par. 5 gegeven theorie als eerste stap tot een oplossing nemen

$$x_G=1 \quad x_6=15,8 \quad x_7=10$$

en de overige x 'en nul. Dit is dus ons uitgangspunt, de oude samenstelling van het produkt; de kosten zijn uiteraard

$$29,4 \cdot 1 + 0 \cdot 15,8 + 0 \cdot 10 = 29,4.$$

Deze eerste stap kan men aflezen uit tabel 8.V; het minimaliseren van (8.22) is weer vervangen door het maximaliseren van het tegengestelde.

Tabel 8.V

Eerste stap tot een oplossing

C	B		x_0	x_G	x_6	x_7	x_A	x_B	x_D	x_E
-29,4	x_G		1	1	0	0	1	1	1	1
0	x_6		15,8	0	1	0	-17,2	22,8	19,8	- 2,2
0	x_7		10	0	0	1	-10	90	90	-10
$z_j - c_j$			-29,4	0	0	0	10,6	- 9,4	- 5,4	0,6

Op de bekende wijze kan men uitgaande van deze tabel de optimale oplossing bepalen; men vindt na twee stappen dezelfde oplossing als in tabel 8.IV.

Het geval kan zich voordoen, dat de optimale oplossing het produkt G bevat; men kan dan door G in de samenstellende stoffen te ontleden, berekenen hoeveel van de grondstoffen de optimale oplossing bevat.

Hoewel deze methode hier geen bekorting van de berekeningen heeft opgeleverd, kan men dit in het algemeen wel verwachten, omdat de reeds bekende oplossing dicht bij de optimale zal liggen dan de "triviale" oplossing.

Wiskundig komt de methode op het volgende neer. De variabelen $x_h (h=1, \dots, p)$ moeten in een probleem voldoen aan voorwaarden van de vorm

$$\sum_{h=1}^p a_{ih} x_h \leq a_{i0} \quad (i = 1, \dots, m-1) \quad (8.28)$$

waarin de a_{i0} nu willekeurige waarden mogen bezitten en aan

$$\sum_{h=1}^p a_{mh} \cdot x_h = 1 \quad (8.29)$$

Wanneer een oplossing bekend is, waarbij het linker lid van de i^{de} ongelijkheid ($i=1, \dots, m-1$) uit (8.28) de waarde a_{i0}^* aanneemt, dan verminderen wij deze ongelijkheid met

$$a_{i0}^* \left(\sum_{h=1}^p a_{mh} x_h - 1 \right)$$

Daar dit verschil wegens (8.29) nul is, verandert de voorwaarde hierdoor niet; de vorm wordt

$$\sum_{h=1}^p a_{ih} x_h - a_{i0}^* \left(\sum_{h=1}^p a_{mh} x_h - 1 \right) \leq a_{i0}$$

of

$$\sum_{h=1}^p (a_{ih} - a_{i0}^* a_{mh}) x_h \leq a_{i0} - a_{i0}^*$$

waarin het rechter lid wegens $a_{i0}^* \leq a_{i0}$ niet negatief is. De nieuwe ongelijkheden zijn dus gelijkwaardig met de oude en voldoen aan de eisen, die wij aan het stelsel (3.2) hebben opgelegd.

Het achteraf toevoegen van een voorwaarde

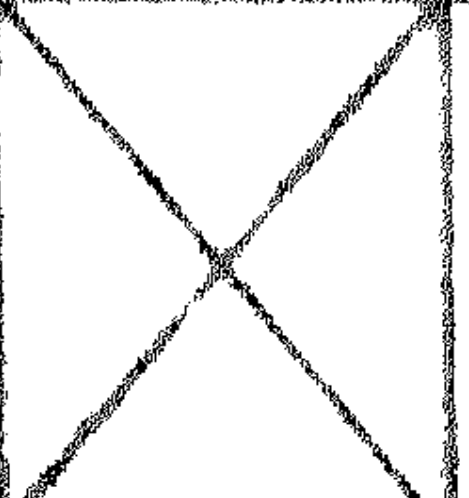
Soms komt het voor dat men zich na de berekening van de optimale oplossing realiseert dat een bepaalde voorwaarde ten onrechte niet in het model was opgenomen. Het is dan niet noodzakelijk de berekening van het begin af aan opnieuw uit te voeren. Men kan namelijk uitgaan van de verkregen x -waarden en dan op de hieronder aangegeven wijze, welke gebaseerd is op de van E.M.L. BEALE¹⁾ afkomstige oplossingsmethode voor lineaire programmeringsproblemen, een optimale oplossing berekenen. Wij zullen van deze methode niet de bijbehorende

1) E.M.L. BEALE, An alternative Method for Linear Programming, Proc. Cambridge Phil.Soc. 50 (1954) 513-523.

formules geven, doch ons beperken tot een illustratie. Hiertoe gebruiken wij wederom voorbeeld 1.1 waaraan later de in voorbeeld 1.2 vermelde extra-voorwaarde wordt toegevoegd.

Volgens de simplexmethode berekenen wij de goedkoopste legering van de grondstoffen A, B, D en E die minstens 18% koper bevat. De tabel, welke bij de optimale oplossing past is opgegeven in tabel 8.VI.

Tabel 8.VI
Eindoplossing bij twee voorwaarden

C	B	X_0	M	x_5	x_A	x_D	x_E
-30	x_E	0,28	3,56	-0,04	1,6	0	0,12
-20	x_B	0,72	-2,56	0,04	-0,6	1	0,88
$z_j - c_j$		-22,8	-55,6 -M	0,4	4	0	2,8

Hieruit kunnen wij de volgende vergelijkingen aflezen:

$$0,28 = 3,56 \mu - 0,04x_5 + 1,6x_A + 0,12x_D + x_E \quad (8.30)$$

$$0,72 = -2,56 \mu + 0,04x_5 - 0,6x_A + x_B + 0,88x_D \quad (8.31)$$

De in de B-kolom opgenomen variabelen komen zoals steeds slechts in één vergelijking voor. De nieuwe voorwaarde waaraan moet zijn voldaan, luidt nu (vgl. (1.4))

$$100x_B + 100x_D \leq 20, \quad (8.32)$$

of, na het toevoegen van de verschilvariabele x_6

$$100x_B + 100x_D + x_6 = 20. \quad (8.33)$$

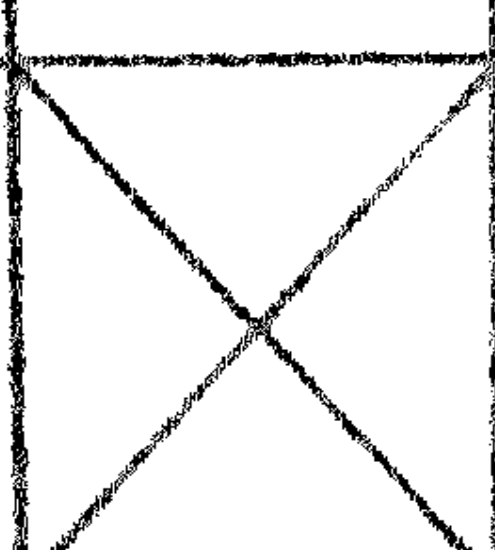
Wanneer de oude oplossing aan (8.32) zou voldoen, dan zou deze ook de optimale oplossing van het nieuwe probleem zijn. Bij het onderhavige voorbeeld is dit niet het geval. Met behulp van de uit tabel 8.VI afgelezen vergelijkingen elimineren wij daarom uit (8.33) de variabelen uit de B-kolom, hier dus alleen x_B . Wij vinden

$$-52 = 256 \mu - 4x_5 + x_6 + 60x_A + 12x_D. \quad (8.34)$$

Ook uit deze vergelijking blijkt dat de oude oplossing niet meer voldoet; immers μ , x_5 , x_A en x_D zijn alle nul en dus is $x_6 = -52$. Aan tabel 8.VI wordt nu een nieuwe rij en een nieuwe kolom toegevoegd. De nieuwe rij bevat in de B-kolom de variabele x_6 , in de X_0 -kolom het getal -52 en in de overige kolommen de coëfficiënten welke in (3.34) staan voor de variabelen, vermeld boven de kolommen. De nieuwe kolom bevat alleen nullen, behalve in het vakje, dat deze kolom met de nieuwe rij gemeen heeft; zie tabel 8.VII.

Tabel 8.VII

Het toevoegen van een nieuwe voorwaarde

C	B	X_0	M	X_5	X_6	X_A	X_B	X_D	X_E
-30	x_E	0,28	3,56	-0,04	0	1,6	0	0,12	1
-20	x_B	0,72	-2,56	0,04	0	-0,6	1	0,88	0
0	x_6	-52	256	-4	1	60	0	12	0
$z_j - c_j$		-22,8	-55,6 +M	0,4	0	4	0	2,8	0

Uitgaande van deze tabel trachten wij nu een nieuwe oplossing te berekenen, die wel aan alle voorwaarden voldoet. Men dient daartoe als volgt te werk te gaan:

- 1) bepaal in de toegevoegde $(m+1)^{ste}$ rij welke elementen na de X_0 -kolom < 0 zijn; indien deze alle waarden ≥ 0 bezitten, is aan de voorwaarden van het nieuwe probleem niet te voldoen;

- 2) bereken voor welke waarde(n) van j ($j > 0$) het quotiënt

$\frac{z_j - c_j}{a_{m+1,j}}$ ($a_{m+1,j} < 0$) maximaal is; hierin is $a_{m+1,j}$ het element in de toegevoegde rij en de j^{de} kolom; laat dit maximum bereikt worden voor $j = 1$; ¹⁾

- 1) Wanneer dit maximum voor meer dan één waarde van j bereikt wordt, dan kan men willekeurig één van deze kiezen.

- 3) voer de op blz. 30-31 aangegeven bewerkingen uit, waarbij de nieuwe rij de rol van de daar met r aangegeven rij vervult en de 1^{de} kolom, die van de k^{de} kolom aldaar.

Wanneer wij deze bewerkingen toepassen op tabel 8.VII, dan vinden wij tabel 8.VIII.

Tabel 8.VIII
Eindoplossing bij drie voorwaarden

C	B	X_0	M	X_5	X_6	X_A	X_B	X_D	X_E
-30	x_E	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
-20	x_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
0	x_5	13	-64	1	-0,25	-15	0	-3	0
$z_j - c_j$	X	-28	-30 +M	0	0,10	10	0	4	0

De nieuwe waarden van de variabelen kunnen op de gebruikelijke wijze uit de tabel worden afgelezen. Wij zien, dat alle variabelen hier waarden ≥ 0 bezitten en dat de oplossing dus aan de gestelde voorwaarden voldoet. Indien één of meer van de getallen uit de X_0 -kolom wederom negatief zijn, dan moet op één van de betrokken rijen (bij voorkeur de rij, waarin het kleinste getal staat) het procédé worden toegepast dat hierboven voor de toegevoegde rij is aangegeven. Hiermee gaat men door tot alle getallen in de X_0 -kolom ≥ 0 zijn. Men kan bewijzen, dat zodra dit het geval is, ook werkelijk de optimale oplossing onder de gestelde voorwaarden is bereikt. Bij tabel 8.VIII verkeren wij dus in die situatie; de tabel is dan ook identiek aan tabel 8.IV.

Het hier gegeven rekenschema kan men o.a. gebruiken, wanneer men na wil gaan hoe groot de extra kosten aan grondstoffen zijn, wanneer men een produkt een nieuwe voorwaarde, bijvoorbeeld een nieuwe kwaliteitseis, oplegt. Men berekent dan de optimale samenstelling met en zonder deze eis en bepaalt het verschil van de bij de optimale oplossingen behorende kosten.

9. Twee variaties op de simplexmethode

Volgens (5.12) resp. (5.16) neemt de waarde van de te maximaliseren functie toe bij een bepaalde stap, wanneer $\theta(c_k - z_k) > 0$ is. Daar wij θ niet negatief moeten kiezen, dient dus $c_k - z_k > 0$ te zijn, of $z_k - c_k < 0$. Bij de in paragraaf 5 beschreven iteratiemethode werd steeds de meest negatieve waarde van $z_k - c_k$ opgezocht. Daar de mate waarin z_0 toeneemt door $\theta_0(c_k - z_k)$ wordt bepaald, ligt het meer voor de hand bij iedere stap die vector A_k in de basis op te nemen, waarvoor $\theta(c_k - z_k)$ maximaal is, omdat men dan mag verwachten het maximum in een kleiner aantal stappen te bereiken. In het algemeen is dit inderdaad het geval, doch hier staat tegenover dat de tijd, nodig om één stap uit te voeren, groter wordt; immers voor iedere $z_j - c_j < 0$ moeten nu de elementen $x_{ij} > 0$ opgespoord worden en de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$ ($x_{ij} > 0$) bepaald. De ervaring leert dat bij handberekeningen (eventueel met behulp van tafelmachines) de tijdwinst verkregen door het kleinere aantal stappen meestal ruimschoots opweegt tegen de iets langere tijd nodig per stap, zodat het aan te bevelen is hierbij deze methode te gebruiken. In paragraaf 10 wordt een voorbeeld zowel met het criterium $z_j - c_j$ als met het criterium $\theta(z_j - c_j)$ uitgerekend.

Voor elektronische machines wordt altijd de kleinste waarde van $z_j - c_j$ gebruikt als criterium, welke vector bij de volgende stap in de basis opgenomen moet worden.

De andere variaties, welke wij noemen, betreffen de behandeling van de bij de constructie van een beginoplossing soms in te voeren variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$. Wanneer wij dit doen, bevatten de verschillen $z_j - c_j$ twee termen, een term zonder en een term met M. Gewoonlijk voegt men bij het oplossen van dergelijke problemen een nieuwe, dus $(m+2)^{\text{de}}$ rij toe aan de tabellen, waarin de coëfficiënten van M in $z_j - c_j$ geschreven worden. De berekening wordt in twee fasen uitgevoerd. In de eerste fase gebruikt men de elementen van de nieuwe rij als criterium, welke variabele in de basis moet worden opgenomen. Men gaat hiermee door, ofwel tot de B-kolom geen van de variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$ meer bevat, ofwel tot alle coëfficiënten in de $(m+2)^{\text{de}}$ rij ≥ 0 zijn. In het eerste geval heeft men een toegelaten oplossing van het oorspronkelijke probleem bereikt en kunnen alle variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$ weggelaten worden, evenals de toegevoegde $(m+2)^{\text{de}}$ rij.

In het tweede geval komt men uit op één van de volgende drie situaties:

- a) er zijn nog variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$; volgens blz.39-40 bestaat er geen oplossing van het oorspronkelijke probleem;
- b) de variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$ zijn alle nul en de bijbehorende vectoren komen geen van alle in de basis voor;
- c) de variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$ zijn alle nul, doch één of meer van de vectoren $M_1, \dots, M_1$ komen in de basis voor.

In de situaties b) en c) begint men aan de tweede fase. Bij b) laat men de variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$ alle verder buiten beschouwing, evenals de toegevoegde $(m+2)^{de}$ rij en men gaat verder op de gebruikelijke wijze. In geval c) kan men dit niet doen omdat dan variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$ die in het begin van de tweede fase basisvariabelen met de waarde nul zijn, later positief kunnen worden. Om dit te vermijden blijft men de $(m+2)^{de}$ rij meetransformereren en bepaalt men bij iedere stap de in de basis op te nemen vector met behulp van die $z_j - c_j$, waarvoor de coëfficiënt van M nul is.

De hier beschreven methode, waarbij men eerst een toegelaten basisoplossing zoekt, zonder daarbij rekening te houden met de coëfficiënten van de te optimaliseren functie, en pas daarna de optimale, noemt men de "twophase simplexmethod". Aangezien men variabelen $\mu_1, \dots, \mu_1$, welke uit de basis geëlimineerd zijn, daarin niet voor de tweede keer hoeft toe te laten is het bij de tot nu toe besproken vormen van de simplexmethode niet nodig de vectoren (kolommen) $M_1, \dots, M_1$ mee te transformereren. Het bezwaar van deze methode is dat het totale aantal stappen om de optimale oplossing te bereiken in het algemeen groter is dan bij de in paragraaf 8 beschreven methode; de organisatie is echter iets eenvoudiger.

Naast de hier beschreven methode zijn er ook nog andere voorgesteld; zie bijv. het artikel van G.F. HADLEY en M.A. SIMONNARD.¹⁾

1) G.F. HADLEY and M.A. SIMONNARD, A simplified two-phase technique for the simplex-method, Naval Research Logistics Quarterly 6 (1959) 221-226.

10. Toepassing: het optimaal in repen snijden van grondmateriaal.

Een veel voorkomend probleem kan in de volgende vorm gegoten worden. Men beschikt over grondmateriaal dat bestaat uit rollen (papier, bladtin) of platen (ijzer) van een bepaalde breedte of van verschillende gegeven breedten. Voor de verkoop of voor de eigen produktie heeft men rollen respectievelijk platen nodig van allerlei breedten en deze worden gemaakt uit het grondmateriaal door dit op de beschikbare snijmachines op maat te snijden. Hierbij zal meestal afval ontstaan, dat ofwel weggegooid wordt ofwel verkocht wordt tegen lagere prijzen, ofwel opnieuw verwerkt moet worden tot grondmateriaal. Daar hiermee verliezen gepaard gaan, zal men trachten het snijden zo gunstig mogelijk te doen.

Stel dat het grondmateriaal van een fabriek bestaat uit rollen van een standaardlengte en van 100 cm en 130 cm breedte. Er zijn 20 rollen van 35 cm, 40 van 40 cm en 20 van 45 cm breedte nodig. Gevraagd wordt op welke wijze deze uit het grondmateriaal vervaardigd kunnen worden, zodanig dat de totale oppervlakte van de restanten minimaal is. Dit criterium kan natuurlijk slechts dan zinvol zijn, wanneer de waarde van de restanten niet afhangt van de breedte. Aangezien de goedkoopste oplossing van dit probleem zou kunnen betekenen, dat er van een bepaald type rol zeer veel meer gemaakt wordt dan nodig is, eisen wij bovendien nog dat van alle breedten hoogstens twee keer het nu gevraagde aantal rollen gemaakt mag worden.

Men kan rollen op verschillende wijzen uit het grondmateriaal snijden. Bijvoorbeeld kan men uit een rol van 100 cm breedte één rol van 35 cm en één van 45 cm snijden, de rest is dan 20 cm breed; of men kan uit een rol van 130 cm twee rollen van 35 cm snijden en één van 40 cm, waarbij de rest eveneens 20 cm bedraagt. Wij beperken ons tot combinaties met een restbreedte < 35 cm.¹⁾ Tabel 10.I bevat een overzicht van de mogelijke combinaties met de bijbehorende restbreedten.

1) Men kan laten zien dat deze niet in de optimale oplossing voorkomen.

Tabel 10.I
Mogelijke produktiecombinaties

combinatie breedte	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	P ₁₁	P ₁₂	P ₁₃	P ₁₄	P ₁₅
35	2	1	1	0	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0
40	0	1	0	2	1	0	0	1	0	2	1	0	3	2	1
45	0	0	1	0	1	2	0	0	1	0	1	2	0	1	2
restbreedte	30	25	20	20	15	10	25	20	15	15	10	5	10	5	0
	uit 100 cm						uit 130 cm								

Vergelijken wij in tabel 10.I de combinaties P₁ en P₇, dan zien wij dat deze beide alleen goede rollen leveren van 35 cm, maar dat de rest bij P₁ 30 cm bedraagt en bij P₇ 25 cm. In de optimale oplossing zal P₁ dus zeker niet gebruikt worden, zodat wij deze mogelijkheid van het begin af aan buiten beschouwing kunnen laten. Hetzelfde volgt voor P₄ uit een vergelijking met P₁₃. Andere combinaties kunnen niet zonder meer weggelaten worden; wel is bijvoorbeeld P₁₁ voordeliger dan P₅, terwijl er meer goede rollen geproduceerd worden, maar door de voorwaarden met betrekking tot de maximaal toegelaten produktie kan het in principe toch gebeuren dat P₅ wel in de optimale oplossing aanwezig is, doch P₁₁ niet. Alleen de produktiecombinaties P₁ en P₄ worden dus geschrapt.

Wanneer wij x₁ rollen volgens combinatie P₁ snijden, dan luidt de wiskundige formulering van het probleem:

$$\begin{aligned} \text{minimaliseer } y_0 = & 25x_2 + 20x_3 + 15x_5 + 10x_6 + 25x_7 + 20x_8 + 15x_9 \\ & + 15x_{10} + 10x_{11} + 5x_{12} + 10x_{13} + 5x_{14} \end{aligned} \quad (10.1)$$

onder de voorwaarden

$$x_2 + x_3 + 3x_7 + 2x_8 + 2x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \geq 20 \quad (10.2)$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + 2x_{10} + x_{11} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15} \geq 40 \quad (10.3)$$

$$x_3 + x_5 + 2x_6 + x_9 + x_{11} + 2x_{12} + x_{14} + 2x_{15} \geq 20 \quad (10.4)$$

$$x_2 + x_3 + 3x_7 + 2x_8 + 2x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 40 \quad (10.5)$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + 2x_{10} + x_{11} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15} \leq 80 \quad (10.6)$$

$$x_3 + x_5 + 2x_6 + x_9 + x_{11} + 2x_{12} + x_{14} + x_{15} \leq 40 \quad (10.7)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=2,3,5 \text{ t/m } 15) \quad (10.8)$$

De formules (10.1) t/m (10.7) krijgen de in (3.3) en (3.5) gegeven vorm, wanneer wij $z_0 = -y_0$ maximaliseren, aan de ongelijkheden (10.2), (10.3) en (10.4) respectievelijk de variabelen x_{16} , x_{17} en x_{18} met een minteken en aan de ongelijkheden (10.5), (10.6) en (10.7) de variabelen x_{19} , x_{20} en x_{21} met een plusteken toevoegen. Het probleem luidt dan:

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } z_0 = & -25x_2 - 20x_3 - 15x_5 - 10x_6 - 25x_7 - 20x_8 \\ & -15x_9 - 15x_{10} - 10x_{11} - 5x_{12} - 10x_{13} - 5x_{14} \end{aligned} \quad (10.9)$$

onder de voorwaarden

$$x_2 + x_3 + 3x_7 + 2x_8 + 2x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} - x_{16} = 20 \quad (10.10)$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + 2x_{10} + x_{11} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15} - x_{17} = 40 \quad (10.11)$$

$$x_3 + x_5 + 2x_6 + x_9 + x_{11} + 2x_{12} + x_{14} + 2x_{15} - x_{18} = 20 \quad (10.12)$$

$$x_2 + x_3 + 3x_7 + 2x_8 + 2x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{19} = 40 \quad (10.13)$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + 2x_{10} + x_{11} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + x_{20} = 80 \quad (10.14)$$

$$x_3 + x_5 + 2x_6 + x_9 + x_{11} + 2x_{12} + x_{14} + 2x_{15} + x_{21} = 40 \quad (10.15)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=2,3,5 \text{ t/m } 21) \quad (10.16)$$

Aangezien nu nog niet alle eenheidsvectoren aanwezig zijn om het iteratieproces mee te kunnen beginnen, draaien wij van (10.10) en (10.12) de tekens van linker en rechter lid om en tellen wij (10.11) bij de nieuwe vergelijkingen op. Tenslotte voegen wij aan (10.11) een μ -variabele toe, die in (10.9) wordt opgenomen met coëfficiënt $-M$ (vergelijk par. 8). Om de uniformiteit te bewaren schrijven wij in plaats van μ hier x_{22} . Het vergelijkingenstelsel bevat nu een volledige eenheidsmatrix en bestaat naast de vergelij-

kingen (10.13), (10.14) en (10.15) uit:

$$-x_3 + x_5 - 3x_7 - x_8 - 2x_9 + x_{10} - x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + x_{16} - x_{17} = 20 \quad (10.17)$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + 2x_{10} + x_{11} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15} - x_{17} + x_{22} = 40 \quad (10.18)$$

$$x_2 - x_3 - 2x_6 + x_8 - x_9 + 2x_{10} - 2x_{12} + 3x_{13} + x_{14} - x_{15} - x_{17} + x_{18} = 20. \quad (10.19)$$

De hier op (10.10), (10.11) en (10.12) toegepaste transformaties leiden er bij een stelsel vergelijkingen van dit type steeds toe dat alle eenheidsvectoren aanwezig zijn, behalve de eenheidsvector met een één in de rij, die correspondeert met de vergelijking met het grootste rechter lid (hier (10.11)), waarvan het teken niet is omgedraaid. Er behoeft dan slechts één μ -variabele toegevoegd te worden, terwijl dit aantal bij rechtstreekse toepassing van de in paragraaf 8 beschreven methode veel groter kan zijn.

De simplexmethode wordt dus toegepast op het volgende lineaire programmeringsprobleem: maximaliseer

$$z_0 = -25x_2 - 20x_3 - 15x_5 - 10x_6 - 25x_7 - 20x_8 - 15x_9 - 15x_{10} - 10x_{11} - 5x_{12} - 10x_{13} - 5x_{14} - Mx_{22} \quad (10.20)$$

onder de bijvoorwaarden (10.13) t/m (10.19).

De vectoren A_j zijn in dit voorbeeld zes-dimensionaal; een basis bestaat uit zes vectoren en er zijn in een basisoplossing dus hoogstens zes elementen > 0 .

Tabel 10.II is de uitgangstabel. Daar wij met een basis van eenheidsvectoren beginnen zijn in de eerste stap de vectoren X_j en A_j voor iedere j aan elkaar gelijk (vgl. punt 1 van blz. 34). De toegelaten oplossing is $x_{16}=20$, $x_{22}=40$, $x_{18}=20$, $x_{19}=40$, $x_{20}=80$, $x_{21}=40$ en alle andere $x_j=0$. De tabellen 10.III t/m 10.VII bevatten de volgende stappen van het iteratieproces. De vectoren die in de basis opgenomen worden, respectievelijk uit de basis geëlimineerd zijn steeds met pijltjes aangegeven. Blanco hokjes geven nullen aan. De gebruikte iteratiemethode is de gewone simplexmethode. In de derde stap wordt de μ -variabele x_{22} geëlimineerd, zodat tabel 10.V een oplossing van het oorspronkelijke probleem bevat; x_{22} is derhalve in het vervolg niet meer nodig en is dus vanaf tabel 10.V weggelaten.

Tabel 10.II

De uitgangstabel

	C	B	x_0	x_{16}	x_{22}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}
→		x_{16}	20	1							-1	1		-3	-1	-2	1		-1	3	2	1	-1
	-M	x_{22}	40		1					1		1			1		2	1		3	2	1	-1
		x_{18}	20			1				1	-1		-2		1	-1	2		-2	3	1	-1	-1
		x_{19}	40				1			1	1			3	2	2	1	1	1				
		x_{20}	80					1		1		1			1		2	1		3	2	1	
		x_{21}	40						1		1	1	2			1		1	2		1	2	
	$z_j - c_j$		-40M							25	20	15	10	25	20	15	15	10	5	10	5	-M	M
										-M	-M			-M		-2M	-M			-3M	-2M		

↑

Tabel 10.III

De eerste verbeterde oplossing

	C	B	x_0	x_{16}	x_{22}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}
→	-10	x_{13}	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$							$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	-M	x_{22}	20	-1	1					1	1			3	2	2	1	1	1				
		x_{18}		-1		1				1	-1	-2	3	2	1	1			-1		-1	-2	
		x_{19}	40				1			1	1			3	2	2	1	1	1				
		x_{20}	60	-1				1		1	1			3	2	2	1	1	1				1
		x_{21}	40						1		1	1	2			1		1	2		1	2	
	$z_j - c_j$		$-\frac{200}{3}$	$-\frac{10}{3}$						25	$\frac{70}{3}$	$\frac{35}{3}$	10	35	$\frac{70}{3}$	$\frac{65}{3}$	$\frac{35}{3}$	10	$\frac{25}{3}$		$\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$
			-20M	+M						-M	-M			-3M	-2M	-2M	-M	-M	-M				

↑

Tabel 10.IV

De tweede verbeterde oplossing

C	B	x_0	x_{16}	x_{22}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}
-10	x_{13}	$\frac{20}{3}$			$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
-M	x_{22}	20		1	-1					1	1	2			1		1	2		1	2	
-25	x_7		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$		
	x_{19}	40	1		-1	1				1	1	2			1		1	2		1	2	
	x_{20}	60			-1		1			1	1	2			1		1	2		1	2	1
	x_{21}	40						1		1	1	2			1		1	2		1	2	
$z_j - c_j$		$-\frac{200}{3}$	$\frac{25}{3}$		$-\frac{35}{3}$				$\frac{40}{3}$	$\frac{70}{3}$	$\frac{70}{3}$	$\frac{100}{3}$			10		10	20		10	20	$\frac{10}{3}$
		-20M			+M					-M	-M	-2M			-M		-M	-2M		-M	-2M	

Tabel 10.V

De derde verbeterde oplossing

→

C	B	x ₀	x ₁₆	x ₁₈	x ₁₉	x ₂₀	x ₂₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁	x ₁₂	x ₁₃	x ₁₄	x ₁₅	x ₁₇
-10	x ₁₃	$\frac{40}{3}$						$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
-5	x ₁₂	10		$-\frac{1}{2}$					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	1	
-25	x ₇	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$				$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	
	x ₁₉	20	1		1																
	x ₂₀	40				1															1
	x ₂₁	20		1			1														
z _j - c _j	X	$-\frac{800}{3}$	$\frac{25}{3}$	$-\frac{5}{3}$				$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$										$\frac{10}{3}$

↑

Tabel 10.VII bevat een optimale oplossing, zodat de gestelde vraag als volgt beantwoord kan worden: snijdt $\frac{40}{3}$ rol volgens combinatie P_{13} en 20 rollen volgens combinatie P_{12} , dus in totaal $\frac{100}{3}$ rol van 130 cm. Men krijgt dan 20 rollen van 35 cm, 40 rollen van 40 cm en 40 rollen van 45 cm; er worden dus van de afmetingen 35 cm en 40 cm precies voldoende rollen gemaakt, en van de afmeting 45 cm 20 te veel, hetgeen in overeenstemming is met het feit dat volgens tabel 10.VII de verschilvariabelen x_{19} , x_{20} en x_{21} respectievelijk de waarden 20, 40 en 0 bezitten.

Ter illustratie van de opmerkingen gemaakt in paragraaf 9, lossen wij dit probleem nu ook nog op met behulp van het criterium $\theta(z_j - c_j)$. In iedere stap wordt dus die vector in de basis opgenomen, waarvoor $\theta(z_j - c_j)$ minimaal is. De uitgangstabel is weer tabel 10.II, terwijl de tabellen 10.VIII t/m 10.X de volgende stappen bevatten.

De eerste vector die nu in de basis opgenomen wordt is X_{11} omdat voor deze vector $\theta(z_j - c_j)$ minimaal is nl. $40(10-M)$; voor de vector X_{13} is $\theta(z_j - c_j) = \frac{20}{3}(10-3M)$, wat kleiner is dan $40(10-M)$.

Tabel 10.VIII

De eerste verbeterde oplossing

C	B	x_0	x_{16}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}
→	x_{16}	20	1						-1	1	-3	-1	-2	1			-1	3	2	1	-1
-10	x_{11}	40							1	1			1	2	1			3	2	1	-1
	x_{13}	20		1					1	-1	-2		1	-1	2		-2	3	1	-1	-1
	x_{19}				1				1	-1	3	1	2	-1			1	-3	-2	-1	1
	x_{20}	40				1															1
	x_{21}						1	-1	1	2	-1	1	-2				2	-3	-1	1	1
$z_j - c_j$		-400						15	20	5	10	25	10	15	-5		5	-20	-15	-10	10



Tabel 10.X bevat weer een optimale oplossing; deze luidt: snijdt $\frac{40}{3}$ rol volgens combinatie P_{11} , $\frac{20}{3}$ rol volgens combinatie P_{12} en $\frac{40}{3}$ rol volgens combinatie P_{14} . Ook met dit productieproces verkrijgt men 20 rollen van 35 cm, 40 rollen van 40 cm en 40 rollen van 45 cm. De optimale oplossing is hier in drie stappen bereikt, terwijl er eerst vijf stappen nodig waren.

Het vinden van twee verschillende optimale oplossingen illustreert dat een lineair programmeringsprobleem meer dan één optimale oplossing kan bezitten. Men kan dan steeds de ene oplossing afleiden uit de andere. In ons geval vindt men, uitgaande van tabel 10.VII tabel 10.X terug door eerst X_{15} te vervangen door X_{14} en daarna X_{13} door X_{11} . Er bestaan methoden om alle optimale oplossingen te vinden; wij gaan hier niet verder op in, maar zullen in paragraaf 13 zo'n methode aangeven voor transportproblemen.

Het hier gegeven voorbeeld kan op velerlei wijzen gegeneraliseerd worden. Zo hoeft men niet de totale restbreedte te minimaliseren, maar kan men ook een kostenfunctie die lineair van de restbreedten afhangt minimaliseren, bijvoorbeeld wanneer restbreedten kleiner dan a cm als afval beschouwd moeten worden, terwijl restbreedten $> a$ tegen een bepaalde prijs verkocht kunnen worden. Ook zou men kunnen eisen dat de verhoudingen tussen de aantallen rollen van de verschillende breedten aan zekere voorwaarden moeten voldoen; enzovoorts.

11. De herziene simplexmethode

Een nadere beschouwing van de punten 1) tot en met 8) op blz. 34 leert, dat wij bij iedere stap alleen nodig hebben: de waarden van $z_j - c_j$ om na te gaan of de optimale oplossing bereikt is en zo niet om te bepalen welke vector in de basis opgenomen moet worden (punt 3), de vector X_k wanneer A_k in de basis wordt opgenomen en de vector X_0 (punt 4).

Laat in een bepaalde stap β de basis zijn. In analogie met X_0 voegen wij de elementen van C met dezelfde indices als de basisvectoren samen tot de vector C_0 . Volgens de definitie van z_0 en z_j (zie (5.8) resp. (5.11)) is dan

$$z_j = C_0 \cdot X_j \quad (j = 0, \dots, n) \quad (11.1)$$

Aangezien $\mathcal{B}$ een basis voorstelt is volgens stelling 5.3 uit hoofdstuk VIII de matrix $\mathcal{B}$ niet-singulier, zodat wij de vergelijkingen (vgl. (5.15))

$$A_j = \mathcal{B} \cdot X_j \quad (11.2)$$

volgens paragraaf 6 van hoofdstuk VIII ook kunnen schrijven in de vorm

$$X_j = \mathcal{B}^{-1} \cdot A_j \quad (j = 0, \dots, n) . \quad (11.3)$$

Substitutie van (11.3) in (11.1) levert

$$z_j = C_0 \mathcal{B}^{-1} A_j \quad (j = 0, \dots, n) . \quad (11.4)$$

Wij zien derhalve dat in iedere stap de vereiste gegevens gevonden kunnen worden, mits naast de oorspronkelijke gegevens $A_0, A_1, \dots, A_n$ en C de inverse $\mathcal{B}^{-1}$ van de matrix $\mathcal{B}$ van de basisvectoren bekend is. Het is dus niet noodzakelijk bij iedere stap alle vectoren X_j ($j=0, \dots, n$) te berekenen, zoals in de simplexmethode gebeurt; het berekenen van $\mathcal{B}^{-1}$ is voldoende. Op deze gedachte is de herziene simplexmethode gebaseerd.

De herziene simplexmethode komt hier op neer, dat men in plaats van de vectoren X_j bij iedere stap de matrix $\mathcal{B}^{-1}$ transformeert. Hoewel dit niet expliciet tot uitdrukking gekomen is, wordt $\mathcal{B}^{-1}$ ook bij de simplexmethode in iedere stap bepaald. Volgens punt 1) op blz. 34 worden steeds de vectoren $X_j = \mathcal{B}^{-1} A_j$ uitgerekend. Nu bevinden zich onder de vectoren A_j de m eenheidsvectoren E_i , zodat ook de produkten $\mathcal{B}^{-1} \cdot E_i$ in iedere stap bekend zijn. Voegt men de eenheidsvectoren samen tot de eenheidsmatrix $\mathcal{I}$, dan volgt hieruit dat het simplex tableau steeds de matrix

$$\mathcal{B}^{-1} \cdot \mathcal{I} = \mathcal{B}^{-1} \quad (11.5)$$

bevat en dat deze afgelezen kan worden uit de kolommen van het tableau die behoren bij de eenheidsvectoren in de uitgangstabel. Men kan dus volstaan met het toepassen van de in paragraaf 5 gegeven transformatieformules op deze kolommen en transformeert dan de inverse van de matrix van basisvectoren. Gewoonlijk past men de formules toe op X_0 en op $\mathcal{B}^{-1}$, zodat de herziene simplexmethode uit

de volgende fasen bestaat:

- 1) zij gegeven dat X_0 een toegelaten basisoplossing is en laat de inverse van de matrix van de bijbehorende basisvectoren zijn $\mathcal{B}^{-1}$;
- 2) bepaal de vector C_0 , bestaande uit de elementen van C behorende bij de basisvariabelen;
- 3) bepaal het produkt $C_0 \mathcal{B}^{-1}$;
- 4) bepaal de vector D_n van de verschillen $d_j = z_j - c_j = C_0 \mathcal{B}^{-1} A_j - c_j$, waarin j alle waarden doorloopt waarvoor A_j niet in de basis is opgenomen (D_n is dus een $(n-m)$ -vector);
- 5) wanneer één of meer van de verschillen d_j negatief zijn, bepaal dan het kleinste van deze verschillen; laat dit bereikt worden voor $j=k$ en alleen voor $j=k$;
- 6) bepaal X_k met behulp van $X_k = \mathcal{B}^{-1} \cdot A_k$; x_{i0}
- 7) bepaal het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ voor zover $x_{ik} > 0$ is; laat dit minimum bereikt worden voor $i=r$ en alleen voor $i=r$;
- 8) beschouw als nieuwe basis $\mathcal{B}'$ van de ruimte de oude basisvectoren, afgezien van A_r en aangevuld met A_k ;
- 9) transformeer X_0 en $\mathcal{B}^{-1}$ volgens (5.21), (5.22), (5.26) en (5.27);
- 10) zie punt 2);
enzovoorts.

De berekeningen kunnen gemakkelijk uitgevoerd worden in een tabel, waarin de eerste kolom de vector C_0 bevat, de tweede kolom de basisvariabelen, de derde de vector X_0 , de vierde tot en met de $(m+3)^{de}$ de matrix $\mathcal{B}^{-1}$ en de laatste kolom de vector X_k , wanneer A_k bij de volgende stap in de basis wordt opgenomen. De tabellen 11.I t/m 11.VI bevatten de achtereenvolgende stappen voor het in paragraaf 10 genoemde probleem; de matrix $\mathcal{A}_n$ is de matrix van alle vectoren A_j die niet in de basis zijn opgenomen en de vector C_n is de corresponderende deelvector van C .¹⁾

- 1) De vectoren C_0 en C_n bevatten samen alle elementen van C .

Tabel 11.I
De uitgangstabel

C_0	B	X_0	B^{-1}	X_{13}
$\rightarrow$	x_{16}	20	1	3
-M	x_{22}	40	1	3
	x_{18}	20	1	3
	x_{19}	40	1	3
	x_{20}	50	1	3
	x_{21}	40	1	3

$$C_0 B^{-1} = (0 \quad -M \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n =$$

$$= (-M+25 \quad 20 \quad -M+15 \quad 10 \quad 25 \quad -M+20 \quad 15 \quad -2M+15 \quad -M+10 \quad 5 \quad -3M+10 \quad -2M+5 \quad -M \quad +M)$$

$$\rightarrow k=13, \quad X_{13} = B^{-1} A_{13} = (3 \quad 3 \quad 3 \quad 0 \quad 3 \quad 0), \quad \theta = \frac{20}{3}, \quad r=16.$$

Tabel 11.II
De eerste verbeterde oplossing

C_0	B	X_0	B^{-1}	X_7
-10	x_{13}	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1
-M	x_{22}	20	-1 \quad 1	3
$\rightarrow$	x_{18}		-1 \quad 1	3
	x_{19}	40	1	3
	x_{20}	60	-1 \quad 1	3
	x_{21}	40	1	3

$$C_0 B^{-1} = (M - \frac{10}{3} \quad -M \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n =$$

$$= (-M+25 \quad -M+\frac{70}{3} \quad \frac{35}{3} \quad 10 \quad -3M+35 \quad -2M+\frac{70}{3} \quad -2M+\frac{65}{3} \quad -M+\frac{35}{3} \quad -M+10 \quad -M+\frac{25}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad -\frac{10}{3} \quad M-\frac{10}{3} \quad +\frac{10}{3})$$

$$\rightarrow k=7, \quad X_7 = (-1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 0), \quad \theta=0, \quad r=18.$$

Tabel 11.III

De tweede verbeterde oplossing

C_0	B	X_0	B^{-1}					X_{12}
-10	x_{13}	$\frac{20}{3}$		$\frac{1}{3}$				$-\frac{2}{3}$
-M	x_{22}	20		1	-1			2
-25	x_7		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$			$-\frac{1}{3}$
	x_{19}	40	1	-1	1			2
	x_{20}	60		-1		1		2
	x_{21}	40					1	2

$$C_0 B^{-1} = (\frac{25}{3} \quad -M \quad M - \frac{35}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n =$$

$$= (\frac{40}{3} \quad -M + \frac{70}{3} \quad -M + \frac{70}{3} \quad -2M + \frac{100}{3} \quad 0 \quad -M + 10 \quad 0 \quad -M + 10 \quad -M + 20 \quad -M + 10 \quad -2M + 20 \quad \frac{25}{3} \quad \frac{10}{3} \quad M - \frac{35}{3})$$

$$\longrightarrow k=12, \quad X_{12} = (-\frac{2}{3} \quad 2 \quad -\frac{1}{3} \quad 2 \quad 2 \quad 2), \quad \theta=10, \quad r=22.$$

Tabel 11.IV

De derde verbeterde oplossing

C_0	B	X_0	B^{-1}					X_{18}
-10	x_{13}	$\frac{40}{3}$		$\frac{1}{3}$				
-5	x_{12}	10		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$
-25	x_7	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{6}$
	x_{19}	20	1	-1		1		
	x_{20}	40		-1			1	
	x_{21}	20		-1	1			1

$$C_0 B^{-1} = (\frac{25}{3} \quad -10 \quad -\frac{5}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = (\frac{40}{3} \quad \frac{40}{3} \quad \frac{40}{3} \quad \frac{40}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{25}{3} \quad \frac{10}{3} \quad -\frac{5}{3})$$

$$\longrightarrow k=18, \quad X_{18} = (0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 1), \quad \theta=20, \quad r=7.$$

Tabel 11.V

De vierde verbeterde oplossing

C_0	E	X_0	B^{-1}					X_{15}
-10	x_{13}	$\frac{40}{3}$		$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$
-5	x_{12}	20	-1	1				
	x_{18}	20	-2	1	1			-2
	x_{19}	20	1	-1		1		
	x_{20}	40		-1			1	
→	x_{21}		2	-2			1	2

$$C_0 B^{-1} = (5 \quad -\frac{25}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = (\frac{50}{3} \quad 15 \quad \frac{35}{3} \quad 10 \quad 10 \quad \frac{20}{3} \quad 5 \quad \frac{10}{3} \quad \frac{5}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad \frac{10}{3} \quad 5 \quad \frac{10}{3} \quad M - \frac{25}{3})$$

$$\longrightarrow k=15, \quad X_{15} = (\frac{1}{3} \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 2), \quad \theta=0, \quad r=21$$

Tabel 11.VI

De vierde verbeterde oplossing

C_0	B	X_0	B^{-1}					
-10	x_{13}	$\frac{40}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$				$-\frac{1}{6}$
-5	x_{12}	20	-1	1				
	x_{18}	20		-1	1			1
	x_{19}	20	1	-1		1		
	x_{20}	40		-1			1	
	x_{15}		1	-1				$\frac{1}{2}$

$$C_0 B^{-1} = (\frac{25}{3} \quad -\frac{35}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{5}{3})$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = (\frac{40}{3} \quad \frac{40}{3} \quad \frac{40}{3} \quad \frac{40}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{25}{3} \quad \frac{10}{3} \quad \frac{5}{3} \quad M - \frac{35}{3}).$$

→ maximum bereikt.

Op deze wijze verkrijgt men nog niet de waarde van het maximum, zodat die bepaald moet worden door de waarden van de basisvariabelen in de laatste stap te substitueren in de functie z_0 . Uit (11.5) en het feit dat de eenheidsvectoren onder de A_j zijn A_{16} , A_{22} , A_{18} , A_{19} , A_{20} en A_{21} volgt dat de inverse van $\mathcal{B}$ bij de in paragraaf 10 gegeven oplossingsmethode steeds te vinden is onder de kolommen X_{16} , X_{22} , X_{18} , X_{19} , X_{20} en X_{21} ; deze staan in de tabellen 10.II t/m 10.VII achter elkaar in het linkerdeel van de tabel en stemmen dan ook bij iedere stap overeen met de matrix die hier steeds geschreven is onder $\mathcal{B}^{-1}$.

Door na te gaan hoeveel vermenigvuldigingen en hoeveel optellingen er bij iedere stap nodig zijn, wanneer men m bijvoorwaarden heeft en n vectoren A_j , kan aangetoond worden, dat de herziene simplexmethode in ieder geval beter is dan de oude, wanneer geldt $n > 3m$ (vergelijk H.M. WAGNER¹⁾). Ook in andere gevallen biedt de herziene methode voordelen, in het bijzonder, wanneer de uitgangsmatrix veel nullen bevat, zoals onder andere vaak het geval is bij zogenaamde dynamische problemen (zie paragraaf 12). In een dergelijke situatie wordt de matrix van de getransformeerde vectoren X_j bij de simplexmethode gewoonlijk snel opgevuld met getallen ongelijk nul, terwijl de herziene methode blijft werken met de veel nullen bevattende oorspronkelijke vectoren A_j .

Gewoonlijk wordt nog een andere transformatie toegepast, die tot een verdere besparing in het werk leidt. Men schrijft dan in de plaats van de te maximaliseren functie

$$z_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

een nieuwe vergelijking

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + x_{n+1} = 0 \quad (11.6)$$

en minimaliseert

$$x_{n+1} = - \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

1) H.M. WAGNER, A comparison of the original and revised simplex methods, Operations Research 5 (1957) 361-369.

of maximaliseert de functie

$$-x_{n+1} \quad (11.7)$$

onder de oude bijvoorwaarden en (11.6) tezamen. De variabele x_{n+1} kan zowel positieve als negatieve waarden aannemen, dit dus in tegenstelling tot de variabelen $x_1, \dots, x_n$. Men verkrijgt door deze transformatie een probleem met één restrictie meer dan het oude probleem, maar met een zeer eenvoudige winstfunctie, waardoor de berekeningen in punt 3) van blz. 34 aanzienlijk worden bekort. In het nieuwe probleem houdt men de vector X_{n+1} steeds in de basis.

Bij de tot dusverre beschreven vorm van de herziene methode wordt in iedere stap de matrix B^{-1} getransformeerd en volledig opgeschreven. Vanwege deze eigenschap noemt men dit de "revised method with full inverse form". Daarnaast bestaat een andere vorm, waarin de matrix B^{-1} niet steeds wordt opgeschreven.

Wij hebben gezien dat de matrix B^{-1} in iedere stap getransformeerd wordt met behulp van de formules (5.26) en (5.27); geeft men de elementen van B^{-1} aan met b_{ij} , de vector die in de basis wordt opgenomen met $X_k(x_{1k}, \dots, x_{mk})$, de vector die verwijderd wordt met $X_r(x_{1r}, \dots, x_{mr})$ en de elementen van de inverse van de nieuwe basis met b'_{ij} , dan gaan de formules (5.26) en (5.27) over in

$$b'_{kj} = \frac{b_{rj}}{x_{rk}} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (11.8)$$

en

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{rj}}{x_{rk}} \cdot x_{ik} \quad (i \neq k; j = 1, \dots, m). \quad (11.9)$$

In figuur 11.1 is dit nog eens schematisch weergegeven.

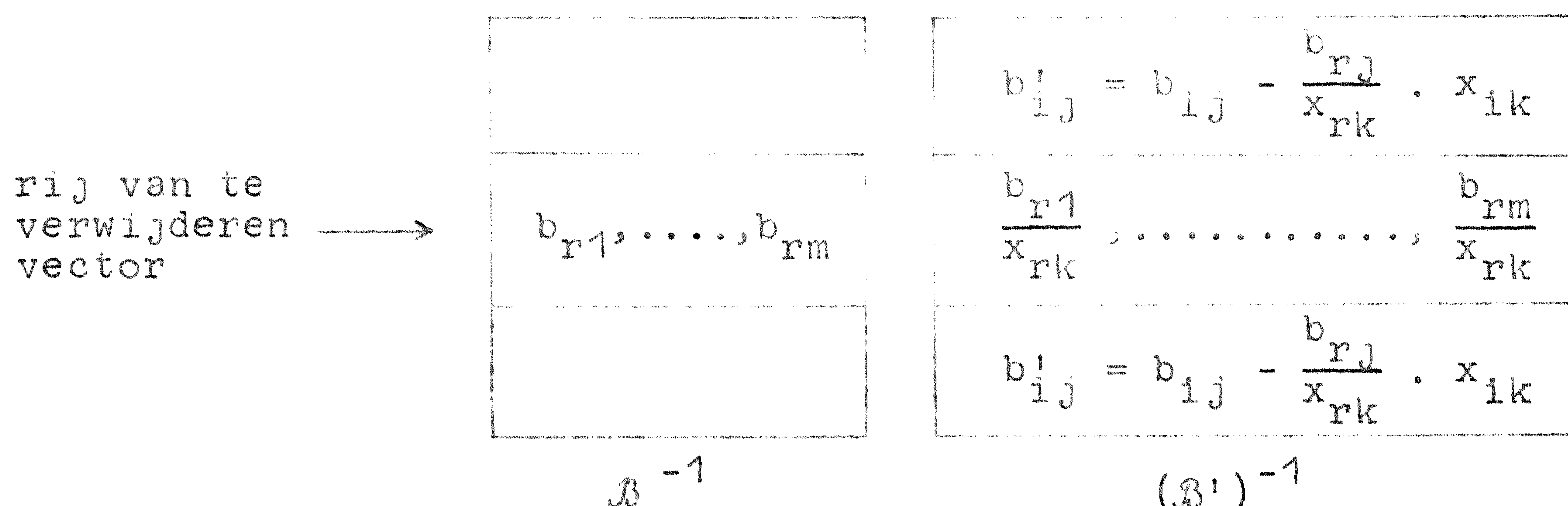


fig. 11.1

Schematische voorstelling van de transformaties (11.8) en (11.9)

Deze transformaties kunnen ook weergegeven worden in de vorm van een matrixvermenigvuldiging. Daartoe beschouwen wij de matrix

$$\mathcal{E}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{x_{1k}}{x_{rk}} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\frac{x_{2k}}{x_{rk}} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & \frac{1}{x_{rk}} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{x_{mk}}{x_{rk}} & & 1 \end{pmatrix}; \quad (11.10)$$

op de r^{de} kolom na is dit de eenheidsmatrix. Vermenigvuldigen wij $\mathcal{B}^{-1}$ met $\mathcal{E}^r$, dan ontstaat precies de matrix $(\mathcal{B}')^{-1}$; dus

$$\mathcal{E}^r \mathcal{B}^{-1} = (\mathcal{B}')^{-1}, \quad (11.11)$$

hetgeen door uitvermenigvuldigen eenvoudig te verifiëren is. De transformatie voor $\mathcal{B}^{-1}$ komt dus neer op een vermenigvuldiging met een eenvoudige matrix, die vastgelegd wordt door de elementen van een bepaalde kolom en het nummer van die kolom.

De matrices $\mathcal{E}^r$ voor de verschillende stappen geven wij aan met respectievelijk $\mathcal{E}_1^r, \mathcal{E}_2^r, \dots$ en de matrices $\mathcal{B}^{-1}$ met respectievelijk $(\mathcal{B}^{-1})_0, (\mathcal{B}^{-1})_1, \dots$. Uit (11.11) volgt dan

$$\mathcal{E}_1^r (\mathcal{B}^{-1})_{1-1} = (\mathcal{B}^{-1})_1. \quad (11.12)$$

Bovendien is

$$(\mathcal{B}^{-1})_0 = \mathcal{I} \quad (11.13)$$

en dus geldt

$$(\mathcal{B}^{-1})_1 = \mathcal{E}_1^r \cdot \mathcal{E}_{1-1}^r \dots \mathcal{E}_1^r \mathcal{I} \quad (11.14)$$

1) Strikt genomen moesten wij schrijven $\mathcal{E}_1^r 1, \mathcal{E}_2^r 2, \dots$, aangezien ook r niet steeds dezelfde waarde bezit; daar verwarring niet mogelijk is, wordt meestal de aangegeven eenvoudigere notatie gebruikt.

Om $\mathcal{B}^{-1}$ in iedere stap te kunnen vinden, behoeven dus slechts de matrices $\mathcal{E}^r$ onthouden te worden. Hieruit vindt men bijvoorbeeld in de 1^{de} stap de vector X_k als volgt:

$$X_k = (\mathcal{B}^{-1})_1 \cdot A_k = \mathcal{E}_1^r \mathcal{E}_{1-1}^r \dots \mathcal{E}_1^r A_k = \mathcal{E}_1^r [\dots \{ \mathcal{E}_2^r (\mathcal{E}_1^r A_k) \}]. \quad (11.15)$$

De produkten tussen haken, accoladen, enzovoorts zijn produkten van een matrix met een vector, die echter steeds zo eenvoudig zijn, dat zij vrijwel neerkomen op produkten van twee vectoren. Op analoge wijze kan de vector $C_0 \mathcal{B}^{-1}$ eenvoudig gevonden worden.

Voor het gegeven voorbeeld zijn de matrices $\mathcal{E}^r$ achtereenvolgens:

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} & \frac{1}{3} & & & \\ & -1 & & & \\ & \frac{1}{3} & & & \\ & -1 & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} & \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{6} & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1 \\ -1 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_4 = \begin{pmatrix} & & & & \\ & 3 & & & \\ & 6 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ -6 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_5 = \begin{pmatrix} & & & -\frac{1}{6} & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldigen wij bijvoorbeeld de matrix β^{-1} uit tabel 11.III met ξ_3 , dan vinden wij:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{6} & 1 & & \\ -1 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \frac{1}{3} & & & \\ & & 1 & -1 & \\ & -\frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \\ 1 & & -1 & 1 & \\ -1 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & & \\ 1 & -1 & & 1 & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

welke matrix inderdaad de matrix β^{-1} uit tabel 11.IV voorstelt.

Vanneer men een groot aantal iteraties heeft uitgevoerd, dan is ook het aantal matrices ξ^r dat onthouden moet worden, groot. Het is echter bekend uit welke vectoren de basis op dat ogenblik bestaat; stel dat dit de vectoren $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ zijn. Men kan nu om geheugencapaciteit te besparen en bovendien om de nauwkeurigheid van de verkregen getallen te vergroten, de inverse van de gevonden basis rechtstreeks berekenen door op $(\beta^{-1})_0 = J$ alleen die transformaties toe te passen, welke nodig zijn om $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ in de basis op te nemen. Hiervoor zijn hoogstens m stappen nodig, zodat men ook hoogstens m matrices ξ^r moet onthouden; door het kleinere aantal stappen zal de betrouwbaarheid van de cijfers toenemen. Dit opnieuw berekenen van de gevonden β^{-1} noemt men herinversie (re-inversion). De herziene simplexmethode in deze vorm staat bekend onder de naam "revised method with product form of inverse".

Beschrijvingen van de beide vormen van de herziene simplexmethode kan men onder andere vinden in het reeds genoemde artikel van WAGNER en in het boek van GASS¹⁾. Geen van beide beschrijvingen zijn echter volledig, terwijl men voorzichtig dient te zijn met de geformuleerde conclusies, daar die gebaseerd zijn op ervaringen, hoofdzakelijk opgedaan met de I.B.M. 650 en de I.B.M. 704; deze conclusies behoeven uiteraard niet noodzakelijk voor andere machines te gelden.

1) S.I. GASS, Linear Programming, Methods and Applications, McGraw Hill (1958).

Een uitstekend overzicht van de verschillende simplexmethoden en een numerieke vergelijking hiervan worden gegeven in het proefschrift van G. ZOUTENDIJK¹⁾.

De boeken van GASS en van METZGER²⁾ geven overzichten van bestaande programma's voor verschillende rekenmachines, waarbij de laatstgenoemde auteur zich beperkt tot I.B.M.-machines.

12. Dynamische problemen

De tot nu toe behandelde problemen van lineaire programmering zijn alle statische problemen: zij hebben betrekking op één periode, of anders gezegd, zij betreffen handelingen, die op één bepaald ogenblik verricht moeten worden. Daarnaast bestaat er een groep problemen, die betrekking hebben op het optimaliseren over een aantal perioden, welke eveneens in de vorm van lineaire programmeringsproblemen gegoten kunnen worden. De meest bekende voorbeelden hiervan liggen op het terrein van de produktieplanning.

Wij illustreren één en ander aan de hand van een voorbeeld van "produktieplanning" op het gebied van personeelsvoorzieningen. Daartoe nemen wij aan dat wij voor een periode van acht jaar, die over twee jaar begint, de personeelsvoorziening van een bedrijf zo goed mogelijk dienen te organiseren. Onderstel dat volgens de voorspellingen respectievelijk 48, 48, 48, 51, 56, 56, 58 en 53 personen nodig zijn voor een bepaalde functie en dat van het huidige personeel geen mensen hiervoor vrijgemaakt kunnen worden. De opleiding voor deze functie duurt twee jaar en er kan dus nog juist een groep voor het eerst betreffende jaar opgeleid worden. De totale opleidingscapaciteit bedraagt 72 personen per jaar. Na het eerste studiejaar blijft gemiddeld slechts de helft van het aantal leerlingen over om het tweede jaar te volgen. Ook bij het opgeleide personeel vindt een zeker verloop plaats, waardoor een jaar na het einde van de opleiding nog slechts $\frac{2}{3}$ deel van de opgeleiden beschikbaar is en twee jaar na het einde niet meer dan de helft. Onder diegenen, die dan nog in dienst zijn vindt in het algemeen

1) G. ZOUTENDIJK, Methods of feasible Directions, A Study in Linear and Non-Linear Programming, Elsevier Publishing Company (1960).

2) R.W. METZGER, Elementary Mathematical Programming, John Wiley and Sons (1958).

geen verloop meer plaats.

Als eenheid van kosten nemen wij de opleidingskosten van iemand die een volledige opleiding heeft gevolgd. De opleidingskosten van iemand die na een jaar afvalt bedragen hiervan de helft. Het is toegestaan meer mensen op te leiden dan er direct nodig zijn, terwijl het ook kan gebeuren dat in een bepaald jaar tengevolge van een teruglopend aantal plaatsen sommige krachten overtoollig worden. In beide gevallen worden de betreffende personen op een wachtlijst gezet en krijgt men per jaar een bedrag uitgekeerd, dat gelijk is aan tweemaal de opleidingskosten per persoon. Een vacature die niet vervuld kan worden veroorzaakt ieder jaar een verlies, dat op viermaal de opleidingskosten per persoon geschat wordt. De vraag is nu hoeveel personen er ieder jaar met een opleiding dienen te beginnen opdat de totale onkosten minimaal zijn.¹⁾

Het tijdsbestek waarin dat probleem loopt omvat 10 perioden, namelijk de acht jaren waarin voor het personeel gezorgd moet worden en de twee daaraan voorafgaande jaren. De eerstgenoemde acht jaren beschouwen wij als de perioden 1 t/m 8 en de op die perioden betrekking hebbende variabelen krijgen de overeenkomstige indices. De twee andere jaren beschouwen wij resp. als de min eerste en als de nulde periode; de bij die jaren behorende variabelen krijgen de indices -1 resp. 0.

Stel dat in de min eerste periode $2a_{-1}$ personen de opleiding beginnen, in de nulde periode $2a_0$, enzovoorts tot en met $2a_6$ personen in de zesde periode.²⁾ In de zevende en achtste periode zullen geen leerlingen meer aangenomen worden, aangezien hiervan toch geen profijt meer kan worden getrokken. De (eventuele) tekorten in de perioden 1 t/m 8 geven wij aan met t_1 t/m t_8 en de (eventuele) overtoollige krachten met r_1 t/m r_8 . De gevraagde aantallen personen zijn n_1 t/m n_8 en de aantallen open blijvende plaatsen van de totale opleidingscapaciteit N bedragen u_{-1} , u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 en u_6 . Als er in de min eerste periode $2a_{-1}$ mensen de opleiding beginnen en in de nulde periode $2a_0$, dan is in de laatstgenoemde periode het

1) De salariskosten van diegenen die in actieve dienst zijn, behoeven wiskundig gezien niet als afzonderlijke term in de onkosten opgenomen te worden, daar men deze kan verwerken in hetzij de termen tengevolge van tekorten, hetzij in de termen tengevolge van overschotten.

2) Wij geven deze aantallen aan met $2a_{-1}$, $2a_0$ enz., omdat dan, gezien het verloop tijdens de opleiding juist resp. a_{-1} , a_0 enz. personen in het bedrijf kunnen gaan werken in de opeenvolgende jaren.

aantal op te leiden personen $a_{-1} + 2a_0$; enzovoorts. De opleidingscapaciteit in het zevende jaar kan buiten beschouwing blijven omdat deze in ieder geval voldoende is om de in het zesde jaar begonnen en dan nog aanwezige leerlingen op te vangen.

In figuur 12.1 zijn de verschillende perioden met de bijbehorende variabelen aangegeven.

nummer periode	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	a_{-1}, u_{-1}	a_0, u_0	a_1, u_1	a_2, u_2	a_3, u_3	a_4, u_4	a_5, u_5	a_6, u_6		
variabelen			n_1 r_1, t_1	n_2 r_2, t_2	n_3 r_3, t_3	n_4 r_4, t_4	n_5 r_5, t_5	n_6 r_6, t_6	n_7 r_7, t_7	n_8 r_8, t_8

fig. 12.1

De verschillende perioden met de bijbehorende variabelen

Tussen de ingevoerde variabelen bestaan de volgende relaties:

$$a_{-1} - r_1 + t_1 = n_1 \quad (12.1)$$

$$\frac{2}{3}a_{-1} + a_0 - r_2 + t_2 = n_2 \quad (12.2)$$

$$\frac{1}{2}a_{-1} + \frac{2}{3}a_0 + a_1 - r_3 + t_3 = n_3 \quad (12.3)$$

$$\frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{2}a_0 + \frac{2}{3}a_1 + a_2 - r_4 + t_4 = n_4 \quad (12.4)$$

$$\frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + a_3 - r_5 + t_5 = n_5 \quad (12.5)$$

$$\frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{2}{3}a_3 + a_4 - r_6 + t_6 = n_6 \quad (12.6)$$

$$\frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{2}{3}a_4 + a_5 - r_7 + t_7 = n_7 \quad (12.7)$$

$$\frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{2}{3}a_5 + a_6 - r_8 + t_8 = n_8 \quad (12.8)$$

$$2a_{-1} + u_{-1} = N \quad (12.9)$$

$$a_{-1} + 2a_0 + u_0 = N \quad (12.10)$$

$$a_0 + 2a_1 + u_1 = N \quad (12.11)$$

$$a_1 + 2a_2 + u_2 = N \quad (12.12)$$

$$a_2 + 2a_3 + u_3 = N \quad (12.13)$$

$$a_3 + 2a_4 + u_4 = N \quad (12.14)$$

$$a_4 + 2a_5 + u_5 = N \quad (12.15)$$

$$a_5 + 2a_6 + u_6 = N \quad (12.16)$$

De vergelijkingen (12.1) t/m (12.8) geven voor de perioden 1 t/m 8 het verband weer tussen de variabelen, waarmee de personeelssituatie

beschreven wordt. De algemene vorm luidt: beschikbare krachten verminderd met overtollige krachten en vermeerderd met het tekort is gelijk aan het aantal nodige krachten. De vergelijkingen (12.9) t/m (12.16) geven het verband weer tussen het aantal gebruikte en het aantal open plaatsen van de opleidingscapaciteit voor de perioden -1 t/m 6.

De te optimaliseren functie wordt gevormd door de onkosten die geminimaliseerd moeten worden. Nemen wij in de periode -1 $2a_{-1}$ leerlingen aan, dan zijn er volgens de gemaakte onderstellingen in de periode 0 nog a_{-1} over, zodat de totale opleidingskosten van deze leerlingen zijn $\frac{3}{2}a_{-1}$. De overige termen in de kostenfunctie geven geen moeilijkheden; de kostenfunctie luidt:

$$y_0 = \frac{3}{2}(a_{-1}+a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) + 2(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8) + 4(t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8) . \quad (12.17)$$

Vullen wij de waarden van n_1 t/m n_8 en N in en draaien wij (12.17) weer van teken om, waarna wij $-y_0$ gaan maximaliseren, dan ontstaat een lineair programmeringsprobleem in de gebruikelijke vorm. De coëfficiënten van de variabelen t_1 t/m t_8 en u_{-1} t/m u_6 vormen tezamen een volledig stelsel eenheidsvectoren, zodat een eerste toegelaten oplossing direct kan worden opgeschreven. Met behulp van de herziene simplexmethode wordt de optimale oplossing in acht stappen gevonden. Deze luidt:

$a_{-1}=36$, $a_0=18$, $a_1=18$, $a_2=12$, $a_3=12$, $a_4=6$, $a_5=6$, $r_8=2$, $t_1=12$, $t_2=6$, $u_1=18$, $u_2=36$, $u_3=36$, $u_4=48$, $u_5=54$ en $u_6=66$, terwijl de overige variabelen alle nul zijn.

Wij moeten dus in de min eerste periode beginnen met de opleiding van 72 personen, in de nulde met de opleiding van 36 personen en dan achtereenvolgens met de opleiding van 36, 24, 24, 12 en nog eens 12 personen. In de achtste periode zijn er twee overtollige krachten, terwijl er in de eerste periode een tekort bestaat van 12 personen en in de tweede periode een tekort van 6 personen.

Ook aan deze probleemstelling kan in velerlei opzichten een meer algemene vorm gegeven worden. Zo kan men rekening houden met de kosten, nodig om leerlingen te werven door één of meer extra termen in de kostenfunctie op te nemen. Verder kan men er rekening mee houden dat niet iedereen de studie in hetzelfde aantal jaren voltooit. Een

andere generalisatie betreft het geval, waarin een deel van de nu opgeleide personen later zelf kan gaan opleiden, waardoor de opleidingscapaciteit vergroot kan worden en men dus voor de opgeleide personen moet kiezen tussen direct inschakelen in het productieproces of verder opleiden tot opleiders (vergelijk ook paragraaf 2 van hoofdstuk XIV).

13. Transportproblemen

Naast de vormen van de simplexmethode, die in principe op alle lineaire programmeringsproblemen van toepassing zijn, bestaan er ook vormen waarbij gebruik gemaakt wordt van een bijzondere structuur van de bijvoorwaarden. Dit leidt dan tot (soms aanzienlijke) vereenvoudigingen van de gewone simplexmethoden. Een dergelijke eenvoudige methode zullen wij in deze paragraaf behandelen en illustreren aan de hand van een bepaald type transportproblemen.

Men kan de methode o.a. toepassen op het volgende probleem. Laat een homogeen produkt aanwezig zijn in m havens en verscheept moeten worden naar n bestemmingen. In de havens zijn resp. aanwezig de hoeveelheden $a_1, \dots, a_m$, terwijl op de plaatsen van bestemming de hoeveelheden $b_1, \dots, b_n$ gebracht moeten worden. Wij onderstellen voorlopig dat er evenveel goederen gevraagd worden als er opgeslagen zijn. De transportkosten zijn evenredig met de verscheepte hoeveelheden. Geeft men nu de vervoerskosten per eenheid van haven i naar bestemming j aan met c_{ij} en de langs deze route vervoerde hoeveelheid met x_{ij} , dan kan men de transportkosten zo klein mogelijk maken door het minimum te bepalen van de functie

$$z_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (13.1)$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (13.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (13.3)$$

en

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

waarin de a 's en b 's getallen > 0 zijn en bovendien voldoen aan de

betrekking

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (13.4)$$

Dit is een lineair programmeringsprobleem, dat met de gegeven simplexmethoden kan worden opgelost. Het is echter mogelijk de oplossing op een eenvoudigere manier te bepalen.

Bij de behandeling van de simplexmethode hebben wij gezien, dat er altijd een optimale oplossing bestaat, waarvan het aantal variabelen $\neq 0$ hoogstens gelijk is aan het aantal bijvoorwaarden, afgezien van de voorwaarden, welke impliceren dat de variabelen ≥ 0 moeten zijn (vgl. blz. 16). In het onderhavige geval bestaan er $m+n$ voorwaarden, die echter lineair afhankelijk zijn.¹⁾ Dit heeft ten gevolge, dat de optimale oplossing, die wij construeren, hoogstens $m+n-1$ variabelen $x_{ij} \neq 0$ zal bevatten. Evenals bij de gewone simplexmethode beginnen wij nu met de constructie van een beginoplossing, die hier overigens niet de triviale is en gaan dan na of wij een verbeterde oplossing kunnen vinden. De optimale oplossing wordt dus ook hier stapsgewijze bereikt. Wij zorgen ervoor dat de beginoplossing $m+n-1$ variabelen $x_{ij} \neq 0$ bevat. Tijdens het proces wordt dit aantal nooit groter; indien het aantal kleiner mocht worden, spreken wij van ontaarding, een geval dat apart zal worden behandeld.

Wij beschrijven nu de methode aan de hand van een numeriek voorbeeld.

Voorbeeld 13.1

In de havens I, II en III liggen respectievelijk 7, 6 en 6 ton van een goed opgeslagen, welke verscheept moeten worden naar de havens A, B, C en D en wel moet A 5, B 9, C 2 en D 3 ton ontvangen. De kosten van vervoer per ton zijn opgegeven in tabel 13. I (vgl. ook voorbeeld 5.2 uit hoofdstuk VIII). Hoewel deze in het

1) Het lineair afhankelijk zijn van vergelijkingen kan op dezelfde wijze gedefinieerd worden als het lineair afhankelijk zijn van vectoren (vgl. definitie 2.2 uit hoofdstuk VIII). In de vergelijkingen (13.2) en (13.3) brengen wij de rechter leden naar links en daarna zoeken wij reële getallen, z.d.d. de som van de met deze getallen vermenigvuldigde vergelijkingen de identiteit nul=nul oplevert. Deze getallen zijn +1 voor alle vergelijkingen uit (13.2) en -1 voor alle vergelijkingen uit (13.3). Inderdaad volgt dan uit $\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i) - \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m x_{ij} - b_j) = 0$ de identiteit $0=0$.

algemeen positief zullen zijn, hebben wij ook nul en een negatieve waarde opgenomen, om te demonstreren dat het voor de methode niet noodzakelijk is dat deze coëfficiënten alle positief zijn (overigens kan men bij een nul denken aan het geval dat I en D dezelfde haven voorstellen en bij een negatief getal aan een premie). Men vraagt zich nu af hoe men het verzendpatroon moet maken, opdat de totale kosten minimaal zijn.

Tabel 13.I
Vervoerskosten per ton

	A	B	C	D
I	5	3	1	0
II	4	3	-1	2
III	8	4	2	1

Geven wij de havens I, II en III aan met de indices 1, 2, 3 en A, B, C, D met 1, 2, 3, 4, dan hebben de vergelijkingen (13.2) en (13.3) hier de volgende vorm:

$$\sum_{j=1}^4 x_{1j} = 7, \quad \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 6, \quad \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 6 \quad (13.5)$$

en

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} = 5, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 9, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 2, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 3. \quad (13.6)$$

Wij gaan nu eerst over tot het bepalen van een beginoplossing. Hiervoor bestaan verschillende methoden, die nauw verwant zijn en waarvan wij er één in de vorm van een recept zullen geven.¹⁾

Constructie van een beginoplossing

- 1) Bepaal welke route per eenheid van vervoer het goedkoopste is en verzend hierlangs zoveel mogelijk (in het voorbeeld: 2 ton van II naar C);
- 2) bepaal welke haven hiermee niet geheel wordt uitgeschakeld;
- 3a) is dit een opslaghaven, ga dan na langs welke route het restant of een deel ervan zo goedkoop mogelijk vervoerd kan

- 1) Een andere is de zogenaamde "northwest-corner rule", welke bijvoorbeeld beschreven wordt in de reeds genoemde boeken van METZGER en GASS.

worden;

- 3b) is dit een bestemmingshaven, ga dan na langs welke route het restant van de gevraagde hoeveelheid, of een deel hiervan, zo goedkoop mogelijk aangevoerd kan worden, (hier: 3 ton van II naar D);
- 4) ga op deze wijze verder tot alle opslagplaatsen uitgeput en alle bestemmingsplaatsen voorzien zijn.

In ons voorbeeld vinden wij zo de in tabel 13.II opgegeven beginoplossing; blanco hokjes geven nullen aan.

Tabel 13.II
De beginoplossing

	A	B	C	D	totaal
I		7			7
II		1	2	3	6
III	5	1			6
totaal	5	9	2	3	19

In dit voorbeeld is $m=3$ en $n=4$, dus $m+n-1=6$, zodat tabel 13.II een oplossing bevat waarin het vereiste aantal variabelen een waarde > 0 bezit. Dit is verkregen door steeds met die haven of die bestemming verder te gaan, waarvan de voorraad nog niet was uitgeput, respectievelijk de behoefte nog niet volledig gedekt. Zolang het probleem niet is onttaard, stuit men nooit op de situatie, waarin een aantal opslagplaatsen $< m$ een aantal bestemmingen $< n$ kan voorzien; men kan dus steeds op de aangegeven wijze verder gaan tot een volledig patroon is verkregen.

De kosten van dit verscheppingsprogramma bedragen, zoals met (13.1) kan worden nagegaan, 72.

Wij vragen ons nu af of er een programma bestaat, waarvan de totale kosten lager zijn dan dit bedrag. In figuur 13.1 is schematisch aangegeven welke routes in gebruik zijn en hoeveel er langs wordt vervoerd. Zolang men zich beperkt tot deze routes, is het niet mogelijk het programma te wijzigen.

Wij nemen daarom in het programma een nieuwe route op, b.v. door 1 ton te verzenden van I naar D. Daardoor moet ook de ver-

scheping op andere routes worden gewijzigd om aan de gestelde eisen te blijven voldoen.

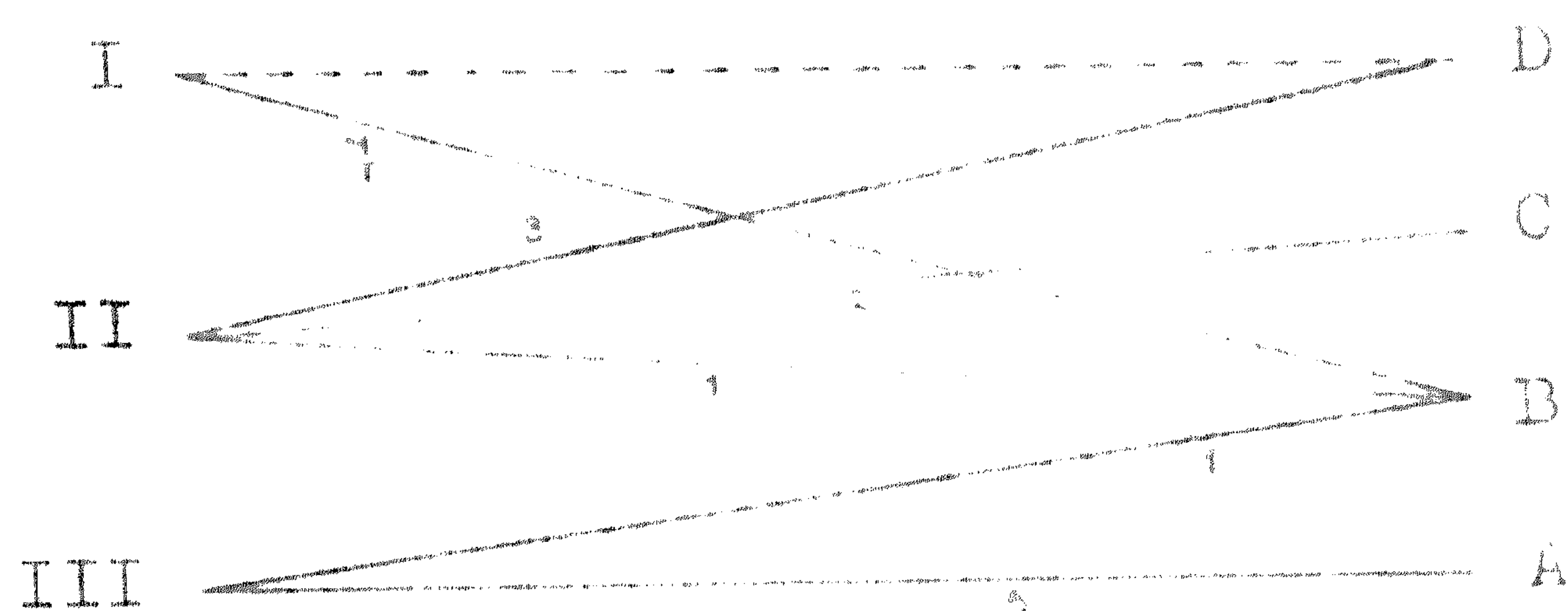


fig. 13.1

Gebruikte routes bij de beginoplossing

Dit kan in ons geval door 1 ton minder te sturen van I naar B, 1 ton meer van II naar B en 1 ton minder van II naar D. De verandering in de kosten bedraagt hierbij

$$-c_{12} + c_{22} - c_{24} + c_{14} = -2,$$

en het is dus voordelig deze verandering aan te brengen. Wij noemen c_{14} de directe kosten van vervoer van I naar D en de gezamenlijke kosten van de routes, die I - D kunnen vervangen, aangegeven door z_{14} , de indirecte. Deze indirecte kosten bezitten dezelfde betekenis als de in par. 5 ingevoerde getallen z_j . Men kan dit onder andere zien aan de wijze waarop in par. 1 onderzocht is of een goedkopere legering gefabriceerd kan worden (vgl. tabel 1.II). Ook het inlassen van een andere nog niet gebruikte route kan de totale kosten lager doen worden. Wij berekenen daarom voor alle niet gebruikte routes het verschil tussen de directe kosten c_{ij} en de kosten z_{ij} . Zolang men niet meer dan één nieuwe route in het programma wil opnemen, kan iedere route slechts op één manier vervangen worden door een combinatie van in gebruik zijnde routes, waardoor de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ dus ondubbelzinnig zijn bepaald.

De volgende stap bestaat nu uit het systematisch berekenen van de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$. De berekeningen kunnen geschieden in een tabel zoals tabel 13.III. In de rechter bovenhoek van ieder vakje zijn de transportkosten c_{ij} per eenheid opgenomen. De gevonden beginoplossing is ingevuld en de waarden hiervan zijn omcirkeld. Aan iedere rij worden nu rijkosten r_i en aan iedere kolom kolomkosten k_j toegevoegd. Deze bepalen wij zodanig dat

Tabel 13.III

Bestaat er een goedkopere oplossing?

$r_i \backslash k_j$					totaal
	5	⑦ 3	1	0	7
	4	① 3	② -1	③ 2	6
	⑤ 8	① 4	2	1	6
totaal	5	9	2	3	19

voor de bij de beginoplossing in gebruik zijnde routes geldt

$$r_i + k_j = c_{ij}. \quad (13.7)$$

In ons geval moet dus gelden

$$\begin{aligned}
 r_1 + k_2 &= 3 \\
 r_2 + k_2 &= 3 \\
 r_2 + k_3 &= -1 \\
 r_2 + k_4 &= 2 \\
 r_3 + k_1 &= 8 \\
 r_3 + k_2 &= 4
 \end{aligned} \quad (13.8)$$

Dit zijn 6 vergelijkingen met 7 onbekenden en dus is er altijd een oplossing te vinden. In het algemeen is het een stelsel van $m+n-1$ vergelijkingen met $m+n$ onbekenden. Wij stellen nu in één van de vergelijkingen, bijvoorbeeld de eerste één van de variabelen r_i of k_j gelijk aan nul en lossen dan vervolgens alle andere onbekenden op. Kiezen wij hier $r_1 = 0$, dan vinden wij respectievelijk $k_2 = 3$, $r_2 = 0$, $k_3 = -1$, $k_4 = 2$, $r_3 = 1$ en $k_1 = 7$. Voor een niet gebruikte route vinden wij het verschil $c_{ij} - z_{ij}$ nu door de betreffende c_{ij} te verminderen met de rijwaarde r_i en met de kolomwaarde k_j , welke toegevoegd zijn aan de rij, respectievelijk de kolom waarin de route zich bevindt. Bijvoorbeeld is

$$c_{11} - z_{11} = 5 - 0 - 7 = -2$$

en

$$c_{33} - z_{33} = 2 - 1 - (-1) = 2.$$

In tabel 13.IV zijn alle waarden r_i en k_j en de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ ingevuld.

Tabel 13.IV

Is een betere oplossing mogelijk?

$r_i \backslash k_j$	7	3	-1	2	totaal
0	-2 ⁵	(7) ³	2 ¹	-2 ⁰	7
0	⁴ -3	(1) ³	(2) ⁻¹	(3) ²	6
1	(5) ⁸	(1) ⁴	2 ²	-2 ¹	6
totaal	5	9	2	3	19

Boven hebben wij reeds gezien dat verlaging van de kosten mogelijk was, indien er een route bestond waarvoor het verschil tussen directe kosten c_{ij} en indirecte kosten z_{ij} negatief is. Als er negatieve verschillen zijn, gaan wij na langs welke nog niet gebruikte route de verlaging van de kosten per ton maximaal is en vervolgens hoeveel er langs deze route verzonden kan worden. Op de eerste vraag luidt in dit geval het antwoord langs II - A (aangegeven met □ in tabel 13.IV). Om de tweede vraag te beantwoorden gaan wij na hoe het programma gewijzigd moet worden. Daartoe bepalen wij in de rij van het aangewezen vakje een omcirkeld vakje met de eigenschap dat er nog een ander omcirkeld vakje in dezelfde kolom staat. In de kolom van het zo verkregen vakje bepalen wij een omcirkeld vakje met de eigenschap dat er nog een ander omcirkeld vakje in dezelfde rij staat. Deze twee stappen herhalen wij om en om net zo lang tot wij in het uitgangspunt zijn teruggekeerd. Hiermee is een gesloten weg bereikt, die aangeeft langs welke routen de te verscheppen hoeveelheden veranderen. Past men dit toe op II-A, dan vindt men dat 1 ton meer langs II-A tengevolge heeft 1 ton minder langs II-B, 1 ton meer langs

III-B en 1 ton minder langs III-A. De hoeveelheid kan langs II-B slechts 1 ton verlaagd worden, zodat in het verbeterde verzendpatroon langs II-A wordt verzonden een ton, langs II-B niets, langs III-B twee ton en langs III-A vier ton. De gesloten weg en het nieuwe programma zijn opgenomen in tabel V. De kosten bedragen nu $72-3 = 69$.

Tabel 13.V
Eerste verbeterde oplossing

$r_i \backslash k_j$					totaal
	5	3	1	0	7
	4	3	-1	2	6
	8	4	2	1	6
totaal	5	9	2	3	19

Men kan nu opnieuw de waarden r_i en k_j bepalen, vervolgens de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ berekenen, nagaan of één van deze verschillen negatief is en zo ja het nieuwe schema van verzending construeren. Zodra alle verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ positief zijn, is het optimale programma gevonden. De tabellen 13.VI, 13.VII en 13.VIII bevatten de berekeningen van de opeenvolgende stappen. Het met $\square$ aangegeven hokje correspondeert steeds met de nieuw op te nemen route.

Tabel 13.VI
Bestaat er nog een betere oplossing?

$r_i \backslash k_j$	7	3	2	5	totaal
0	-2	3	-1	-5	7
-3	4	3	-1	2	6
1	8	4	-1	-5	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 13.VII
Tweede verbeterde oplossing

$r_i \backslash k_j$	7	3	2	0	totaal
0	5 -2	3 7	1 -1	0 0	7
-3	4 4	3 3	-1 2	2 5	6
1	8 1	4 2	2 -1	1 3	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 13.VIII
Derde verbeterde oplossing

$r_i \backslash k_j$	5	3	0	0	totaal
0	5 1	3 6	1 1	0 0	7
-1	4 4	3 1	-1 2	2 3	6
1	8 2	4 3	2 1	1 3	6
totaal	5	9	2	3	19

De kosten bedragen voor de eerste verbeterde oplossing 69, voor de tweede $69 - 3.5 = 54$ en voor de laatste oplossing $54 - 1.2 = 52$. Tabel 13.VIII bevat de optimale oplossing omdat alle $c_{ij} - z_{ij}$ niet negatief zijn (vgl. paragraaf 7).

Alternatieve optima

Tabel 13.VIII leert ons niet alleen dat er geen betere oplossing bestaat, doch ook dat er wel een andere, eveneens optimale oplossing is. Immers de nul in het vakje I-D geeft aan, dat voor deze route directe en indirecte kosten gelijk zijn, zodat het inschakelen van deze route geen wijziging in de totale kosten zal brengen. Dit

alternatieve optimale programma is vermeld in tabel 13.IX; de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ blijven dezelfde.¹⁾

Tabel 13.IX
Een andere optimale oplossing

$r_i \backslash k_j$	5	3	0	0	totaal
0	(1) ⁵	(3) ³	-1 ¹	(3) ⁰	7
-1	(4) ⁴	1 ³	(2) ⁻¹	3 ²	6
1	2 ³	(6) ⁴	-1 ²	0 ¹	6
totaal	5	9	2	3	19

Daar tabel 13.VIII alleen een nul bevat in het vakje I-D bestaan er verder geen optimale oplossingen, die niet verkregen kunnen worden als lineaire combinatie van de in de tabellen 13.VIII en 13.IX vermelde oplossingen. Geven wij deze aan met x'_{ij} , resp. x''_{ij} , dan kan men alle optimale oplossingen van dit probleem voorstellen door

$$x_{ij} = \lambda x'_{ij} + (1-\lambda) x''_{ij}, \quad (13.9)$$

waarin

$$0 \leq \lambda \leq 1. \quad (13.10)$$

Voor $\lambda = \frac{1}{3}$ is de bijbehorende optimale oplossing opgenomen in tabel 13.X.

1) Bij de algemene simplexmethode zou hetzelfde gebeuren, wanneer men een variabele 1 waarvoor $z_1 - c_1 < 0$ is, in de basis zou brengen; dit volgt o.a. uit de regel waarmee de nieuwe verschillen $z_j - c_j$ berekend moeten worden, immers volgens (5.29) is voor

$$j=0 \quad (z_0 - c_0)' = (z_0 - c_0) - \frac{x_{r0}}{x_{r1}} (z_1 - c_1).$$

Tabel 13.X
Nog een optimale oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	1	4		2	7
II	4		2		6
III		5		1	6
totaal	5	9	2	3	19

Had men door het nul worden van niet omcirkelde getallen uit de tabellen drie verschillende optimale oplossingen (x'_{ij} , x''_{ij} en x'''_{ij}) kunnen aflezen, dan zouden alle optimale oplossingen voorgesteld kunnen worden door

$$x_{ij} = \lambda x'_{ij} + \mu x''_{ij} + \nu x'''_{ij} \quad (13.11)$$

met λ , μ en ν alle ≥ 0 en $\lambda + \mu + \nu = 1$.

Opmerking

Uit de berekening van de optimale oplossing is gebleken, dat hierin alleen gehele eenheden worden vervoerd. Het is niet zo, dat men door het toelaten van oplossingen, waarin gedeelten van tonnen vervoerd worden, een goedkoper verscheppingsprogramma kan bereiken. Dat er steeds een optimale oplossing bestaat, die alleen gehele eenheden bevat, wordt veroorzaakt door het feit dat de variabelen in de vergelijkingen (13.2) en (13.3) slechts met coëfficiënt 1 voorkomen.

Een controlemiddel

Door het programma te vergelijken met de randtotalen, is het niet moeilijk bij iedere stap te controleren of men een oplossing heeft die aan de eisen voldoet. De berekeningen van de verschillen tussen directe en indirecte kosten worden op deze wijze niet gecontroleerd. Eventuele hierin gemaakte fouten beïnvloeden de uiteindelijke oplossing echter niet, omdat deze verschillen bij een volgende stap niet meer worden gebruikt. Bij de algemene simplexmethoden was dit wel het geval.

Ontaardingen

Ontaardingen kunnen ontstaan wanneer een aantal ($< m$) havens precies kan voorzien in de gezamenlijke behoeften van een aantal ($< n$) bestemmingen.

Bij de constructie van de beginoplossing kan dit tengevolge hebben dat in een bepaalde fase de betreffende haven is uitgeput en bovendien de betreffende bestemming volledig voorzien. Men kan dan voor de nog niet behandelde havens en bestemmingen op de op blz. 79 aangegeven wijze een beginoplossing construeren.

Verder is het mogelijk, dat het aantal variabelen met waarden groter dan nul, bij een bepaalde stap kleiner is dan $m+n-1$ en in een dergelijk geval slaagt men er niet in, de getallen $c_{ij}-z_{ij}$ te berekenen.

Er bestaan twee nauw verwante methoden om de moeilijkheden op te lossen. De eerste methode illustreren wij door een voorbeeld. Stel dat men van het reeds doorgerekende probleem de in tabel 13.XI gegeven oplossing heeft gevonden en dat men nu bij de volgende stap de route I-A in de oplossing op wil nemen (dit dus in afwijking van de in het voorgaande gegeven regel).

Tabel 13.XI

Een oplossing die tot een ontaarde oplossing kan leiden

$r_j \backslash k_j$	7	3	1	2	totaal
0	-2 $\boxed{5}$	$\boxed{3}$ $\textcircled{5}$	$\textcircled{2}$ $\boxed{1}$	-2 $\boxed{0}$	7
0	$\boxed{4}$ -3	$\textcircled{3}$ $\boxed{2}$	-2 $\boxed{-1}$	$\textcircled{3}$ $\boxed{2}$	6
1	$\textcircled{5}$ $\boxed{3}$	$\boxed{4}$ $\textcircled{1}$	0 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 13.XII
Een ontaarde oplossing

$r_i \backslash k_j$					totaal
	$\begin{matrix} 5 \\ \textcircled{5} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \end{matrix}$	7
	$\begin{matrix} 4 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ \textcircled{3} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ \textcircled{3} \end{matrix}$	6
	$\begin{matrix} 8 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ \textcircled{6} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \end{matrix}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Het nieuwe, in tabel 13.XII vermelde programma is ontaard omdat er slechts vijf routes gebruikt worden. Het is nu niet mogelijk op de aangegeven wijze de waarden r_i en k_j te berekenen. Om dit nu toch mogelijk te maken laten wij in één van de twee vakjes, waarvan de waarde nul is geworden, een omcirkelde nul staan, bijvoorbeeld in vakje I-B. Wij kunnen nu weer op de gebruikelijke wijze verdergaan. Tabel 13.XIII bevat de nieuwe waarden $c_{ij} - z_{ij}$.

Tabel 13.XIII
Berekening van de waarden $c_{ij} - z_{ij}$ bij een ontaarde oplossing

$r_i \backslash k_j$	5	3	1	2	totaal
0	$\begin{matrix} 5 \\ \textcircled{5} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ \textcircled{0} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}$	7
0	$\begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ \textcircled{3} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ \textcircled{3} \end{matrix}$	6
1	$\begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ \textcircled{6} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Neemt men bij de volgende stap II-C in het programma op, dan verdwijnt de ontaarding; kiest men echter I-D of III-D, dan blijft de ontaarding nog langer bestaan. Het eindresultaat is

uiteraard hetzelfde als het in tabel 13.VIII gevondene.

Een elegantere methode is aangegeven door G.B. DANTZIG¹⁾. Wanneer men grote problemen heeft, die op machines berekend moeten worden, is men hier zelfs op aangewezen. Hij komt hierop neer, dat door een kleine transformatie van het probleem een nieuw probleem ontstaat, waarin nooit ontaarding op kan treden.

Hiertoe bepaalt men het minimum van m en n, vermenigvuldigt dit met twee en deelt de eenheid, waarin de getallen in de verscheppingstabel zijn uitgedrukt door dit getal (wanneer in de tabel 3,25 voorkomt, moet men 0,01 als eenheid nemen). Vervolgens kiest men een geschikt positief getal δ dat kleiner is dan het gevonden quotiënt en verhoogt de totalen, die corresponderen met het minimum van m en n hiermee; één van de andere randtotalen wordt verhoogd met δ keer het minimum. In ons geval is het minimum $m=3$, het quotiënt dus $\frac{1}{2 \times 3} = 0,1\bar{6}$; voor δ kiezen wij 0,1 en de gewijzigde eisen worden dan de in tabel 13.XIV vermelde.

Tabel 13.XIV
Gewijzigde verscheppingseisen

	A	B	C	D	totaal
I					7,1
II					6,1
III					6,1
totaal	5	9	2	3,3	19,3

Wij passen op het nieuwe probleem de in deze paragraaf beschreven oplossingsmethode toe en ronden de uitkomsten af tot gehele eenheden (0,0 t/m 0,4 tot 0 en 0,5 t/m 0,9 tot 1). De zo verkregen oplossing is de exakte oplossing van het oorspronkelijke probleem. aangezien er nooit ontaarding kan ontstaan, is ook "cycling" onmogelijk (vergelijk blz. 44 van dit hoofdstuk).

Andere toepassingen

De beschreven methode kan worden toegepast, indien men de bij-

1) G.B. DANTZIG, Application of the simplex method to a transportation problem, hfdst XXIII in Activity Analysis of Production and Allocation. Wiley (1951)

voorwaarden in de vorm (13.2), (13.3) en (13.4) kan gieten. Zoals in het voorbeeld is aangegeven kan dit het geval zijn bij transportproblemen. Behalve bij het verschepen van een homogeen produkt treft men deze o.a. aan bij het voorzien van grossiers door een aantal fabrieken, die dezelfde produkten vervaardigen. Wij kunnen daardoor ook inzicht krijgen in het probleem, waar een nieuwe fabriek of een nieuw distributiedepot te plaatsen. Komen hiervoor een aantal plaatsen in aanmerking, dan kan men voor elk daarvan het transportprobleem oplossen en dan nagaan voor welke plaats de minimale transportkosten het kleinste zijn (vgl. voorbeeld 2.1 uit hoofdstuk X).

Een geheel ander toepassingsgebied is dat van het personeelsbeleid. Een bedrijf heeft voor N functies N sollicitanten opgeroepen. De laatsten kan men verdelen in m elkaar uitsluitende groepen, waarvan de i^e groep a_i leden telt. Er zijn n verschillende functies en b_j vacatures van de j^e functie. Heeft men door middel van testen gevonden dat de verwachte geschiktheid van iemand uit de i^e groep voor de j^e functie door het getal (score) c_{ij} wordt weergegeven en geeft men het aantal personen uit de i^e groep, die worden geplaatst in de j^e functie aan met x_{ij} , dan komt de opdracht, de N personen zó over de vacatures te verdelen, dat de totale produktiviteit maximaal is, hierop neer, dat men (13.1) moet maximaliseren onder de voorwaarden (13.2), (13.3) en (13.4). Voor de toepassingsmogelijkheden is behalve de moeilijkheid de c_{ij} goed vast te stellen, een ernstig bezwaar, dat men aanneemt, dat zowel de personen als de functies in een bepaalde groep gelijkwaardig zijn. Indien alle groepen slechts één element bevatten, behoeft men deze onderstelling natuurlijk niet te maken. Een verdere uitwerking van dit probleem kan men o.a. vinden in artikelen van D.F. VOTAW¹⁾ en P.S. DWYER²⁾

Men kan ook problemen, die in eerste instantie niet de vereiste vorm bezitten, vaak door eenvoudige kunstgrepen transformeren in problemen, waarin de bijvoorwaarden wel zijn van de vorm (13.2), (13.3), (13.4). Zo kan men de gegeven methode ook toepassen wanneer de hoeveelheid beschikbare goederen groter is dan de vraag, wanneer dus $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ is. Hiertoe moet men een gefingeerde $(n+1)^{ste}$

1) D.F. VOTAW, Methods of solving some personnel-classification problems, Psychometrika 17 (1952), 255-266.

2) P.S. DWYER, Solution of the personnel-classification problem with the method of optimal regions, Psychometrika 19 (1954) 11-26.

bestemming invoeren, welke $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ ton goederen dient te ontvangen en waarheen de transportkosten vanaf alle opslagplaatsen nul bedragen. Bevat de optimale oplossing b.v. de uitkomst $x_{i,n+1} = 6$, dan betekent dit dat van de goederen in de i^{de} opslagplaats 6 ton niet gebruikt wordt. Een overeenkomstige weg kan men volgen wanneer geldt $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$. In het geval, waarin een bepaalde verbinding niet gebruikt kan worden, kan men het model redden door voor de transportkosten langs deze route een zeer hoog bedrag M per vervoerde eenheid in rekening te brengen.

Aan de andere kant bestaan er ook generalisaties van de hier beschreven methode, waarmee meer algemene transportproblemen opgelost kunnen worden. Zo heeft E.D. SCHELL een methode uitgewerkt, waarmee de volgende vraag beantwoord kan worden¹⁾: waar moet een fabrikant die verschillende artikelen fabriceert in een aantal fabrieken bepaalde artikelen produceren en naar welke afnemers moet hij ze zenden opdat de totale som van fabricage- en transportkosten zo laag mogelijk zij. Het is dan ook nog mogelijk rekening te houden met de capaciteiten van de fabrieken en de transportroutes en met de uiteenlopende fabricagekosten van de artikelen in de verschillende fabrieken. Wij zullen hier echter niet verder op ingaan.

1) E.D. SCHELL, Distribution of a product by several properties, Proceedings of the second Symposium in Linear Programming, (1956), 615-642.